上海研究生教育用书

泛函微分方程的数值处理

匡蛟勋 著

科学出版社

泛函微分方程的数值处理

匡蛟勋　著



科学出版社

1999



内 容 简 介

本书是作者在多年科研基础上汇集了1975年以来国内外主要成果加工整理而成的. 主要包括线性多步法、Runge-Kutta方法、BDF方法及块方法、线性与非线性延时系统的数值处理、中立型方程的数值处理、延时积分方程的数值解及变数延时量方程的数值处理. 本书取材精炼, 内容新颖, 结构严谨, 论述清楚.

本书可作为研究生的一本入门读物, 亦可供有关科研工作者参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

泛函微分方程的数值处理/匡蛟勋著.–北京: 科学出版社, 1999

ISBN 7-03-007342-8

Ⅰ. 泛… Ⅱ. 匡… Ⅲ. 泛函方程: 微分方程–数值计算 Ⅳ. O241.8

中国版本图书馆CIP数据核字 (1999) 第04637号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717

科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999年10月第 一 版 开本: 850×1168 1/32
1999年10月第一次印刷 印张: 7 3/8
印数: 1—2500 字数: 190 000

定价: 15.00元

前　言

本书将集中讨论泛函微分方程的一个重要分支，即延时微分方程（delay differential equations）的数值处理．延时微分方程在生态学、环境科学、电力工程及自动控制等领域中有广泛的应用．如一般的种群增长模型$N'(t)=K[1-N(t-\tau)/P]N(t)$便是一个非线性延时微分方程；电力网络中的能量损耗将出现中立型方程$\chi'(t)=A\chi'(t-\tau)+B\chi(t)+C\chi(t-\tau)$．一般说来，常见的延时微分方程中，只有极少数能够获得理论解的解析表达式，因此这类微分方程的数值处理显得十分必要．

国际上对延时微分方程的数值处理，在 1975 年以前，只有个别学者的零星论文发表，如 1960 年的 Zverkina，1962 年的 Miranker，1964 年的 Feldstein，1965 年的 Snow，1971 年的 Tavernini 等．直到 1975 年 Barwell 提出了数值方法的 *P* 稳定及 *GP* 稳定性概念后才开始有系统的研究．1985 年，Watanabe 最早研究了线性多步法的 *P* 稳定性及 *GP* 稳定性，1986 年 Zennaro 首先讨论了 Runge-Kutta 方法的 *P* 稳定及 *GP* 稳定性，1991～1992 年，荷兰 Leiden 大学的 in'Hout，M. Z. Liu 及 Spijker 对 *P* 稳定性及 *GP* 稳定性又进行了十分细致深刻的研究，1984～1986 年 Jackiewicz 研究了中立型方程的数值处理，1989～1992 年 Torelli 研究了非线性延时微分方程的数值处理，并提出了 *PN* 稳定及 *GPN* 稳定的概念，1993～1994 年作者针对多延时量方程的数值解，提出了 *Pm* 稳定及 *GPm* 稳定的概念，针对中立型方程的数值处理，提出了 *NP* 稳定及 *NGP* 稳定的概念．

总的说来，国际上在 80 年代中期掀起一个研究高潮，国内 90 年代初涉足此领域，但主要对常用方法，如线性 θ 方法，线性多步法，隐式 Runge-Kutta 法，块 θ 方法等进行线性稳定性分

析，即使是线性非自治延时方程数值解的稳定性分析也研究得很少，以非线性延时方程为模型的数值稳定性分析也只是开了个头．鉴于以上原因，本书也只是以较多的篇幅介绍线性稳定性分析，在最后的章节里适当介绍非线性稳定性分析的现有成果．另外，在现有的文献中，数值试验的报道极为有限，针对延时微分方程数值处理的新方法尚未见报道．前面提到的种种数值稳定性，与数值常微分方程中的 A 稳定性及 AN 稳定性类似．

考虑到本书的系统性，我们将详细地介绍常微分方程数值解中常用的方法及其稳定性分析．尽管笔者涉足此领域为时不久，但为了不失时机地把这一新的研究领域介绍给读者，撰写此书，以引起国内学者的共鸣，乃是笔者的最终愿望．另外，仓促上阵，疏漏之处还可能有，望广大读者批评指正．

作者

1997 年于上海

目　　录

第一章　线性多步法

§1.1　引言

在较早的年月里，人们往往认为泛函微分方程，特别是延时微分方程的数值处理，与常微分方程的数值处理没有区别，没有必要加以特别的研究．事实并非如此，用通常的线性多步法或 Runge-Kutta 方法去求解延时微分方程，其数值稳定性问题的分析，要比用它们去求解常微分方程初值问题复杂得多，有些问题至今悬而未决，便是有力证明．例如，用线性多步法

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j},\quad \alpha_k\neq 0,\alpha_0^2+\beta_0^2\neq 0 \tag{1.1}$$

求解方程

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)), & t\geqslant t_0, \\ y(t_0) = \eta \end{cases} \tag{1.2}$$

时，为了考察它的数值稳定性，用(1.1)去解试验方程

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \mathrm{Re}(\lambda)<0, \\ y(t_0) = \eta, \end{cases} \tag{1.3}$$

便得递推关系

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} = h\lambda\sum_{j=0}^{k}\beta_j y_{n+j}. \tag{1.4}$$

式(1.4)也称为关于$\{y_n\}$的线性差分方程．这个差分方程的解$\{y_n\}$(对任意的初始值 $y_0,y_1,\cdots,y_{k-1}$)满足$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ 的充要条件是(1.4)的特征多项式

$$p(z) = \rho(z) - \bar{h}\sigma(z),\quad \bar{h} = \lambda h, h>0 \tag{1.5}$$

是 Schur 多项式，即多项式的每个零点皆位于单位圆内部，其中 $\rho(z)=\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_j z^j$，$\sigma(z)=\sum\limits_{j=0}^{k}\beta_j z^j$．为了判定 $p(z)$是否为 Schur 多项

式，由于 $p(z)$ 的次数是固定的（k 次），因此可以使用 Schur 准则，逐步降低 $p(z)$ 的次数，最后只要判别一个低次多项式是否为 Schur 多项式．具体过程如下：设

$$p(z) = C_k z^k + C_{k-1} z^{k-1} + \cdots + C_1 z + C_0,$$

$$\hat{p}(z) = C_0^* z^k + C_1^* z^{k-1} + \cdots + C_{k-1}^* z + C_k^*,$$

其中 $C_i^*(i=0,1,\cdots,k)$ 为 C_i 的共轭复数．Schur 准则如下

$p(z)$ 是 Schur 多项式当且仅当

$$p_1(z) = \frac{1}{z}[\hat{p}(0)p(z) - p(0)\hat{p}(z)]$$

是 Schur 多项式及 $|\hat{p}(0)| > |p(0)|$．

不难看出，$p_1(z)$ 最多是 $k-1$ 次多项式．重复上面的过程；最终只要判定一个低次多项式是否为 Schur 多项式．

接下去，我们用多步法(1.1)去求解延时方程的一个最简单的模型问题

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + by(t-\tau), & t \geqslant 0, \\ y(t) = \varphi(t), & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $\tau > 0$，$|b| < -\mathrm{Re}(a)$．方法(1.1)的步长 $h = \tau/m$，$m \geqslant 1$ 是某个自然数．我们有

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = ha \sum_{j=0}^{k} \beta_j y_{n+j} + hb \sum_{j=0}^{k} \beta_j y_{n+j-m}. \tag{1.7}$$

上列差分方程的特征多项式是(参看第四章§4.3)

$$p_m(z) = Q(z)z^m + p(z), \tag{1.8}$$

其中

$$Q(z) = \rho(z) - \bar{a}\sigma(z),$$

$$p(z) = \sigma(z)\bar{b},$$

$$\bar{a} = ha,$$

$$\bar{b} = hb.$$

值得注意的是，这里 $m \geqslant 1$ 可以是一个任意的自然数，Schur 准则难以使用，必须寻找别的方法来判定，$p_m(z)$ 是否为 Schur 多项

式.我们已经看出,这里的问题比常微分方程中出现的问题复杂得多.

§1.2 收敛性与零稳定性

定义 2.1 设初值问题(1.2)的解 $y(t)$唯一存在,用(1.1)去求解(1.2)时的解序列为$\{y_n\}$,其中初始值 $y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}$满足

$$\lim_{h\to 0} y_\mu = \lim_{h\to 0} \eta_\mu(h) = \eta, \quad \mu = 0,1,\cdots,k-1$$

时,有

$$\lim_{h\to 0} y_n = y(t_n)$$

$$nh = t_n - t_0$$

对任意的 $t_n \in [t_0, b]$成立,我们就称线性多步法(1.1)是收敛的.

例 用 Euler 方法

$$y_{n+1} = y_n + hf_n, \quad f_n = f(t_n, y_n) \tag{2.1}$$

去求解方程

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

令 $t = nh$ 固定,于是

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + hf_{n-1} \\ &= (1 + \lambda h) y_{n-1} \\ &= (1 + \frac{\lambda t}{n})^n y_0 \\ &= (1 + \frac{\lambda t}{n})^n \eta_0(h) \longrightarrow e^{\lambda t}, (h \to 0), \end{aligned}$$

由此可知,Euler 方法是收敛的.

令 $y(t) \in C^1[t_0, b]$,

$$\mathscr{L}[y(t); h] \equiv \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(t + jh) - h\beta_j y'(t + jh)], \tag{2.2}$$

把(1.10)中出现的 $y(t+jh)$及 $y'(t+jh)$皆在 t 处展开为 Taylor 级数,然后合并 h 的同次幂,得

$$\mathscr{L}[y(t); h] = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + \cdots + C_q h^q y^{(q)}(t) + \cdots, \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{cases} C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \\ C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k), \\ \quad \vdots \\ C_q = \dfrac{1}{q!}(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \cdots + K^q\alpha_k) \\ \qquad - \dfrac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{q-1}\beta_2 + \cdots + K^{q-1}\beta_k). \end{cases} \tag{2.4}$$

定义 2.2 倘(2.4)中的 $C_i(i=0,1,2,\cdots)$满足

$$\begin{aligned} C_0 &= 0, \\ C_1 &= 0, \\ &\vdots \\ C_p &= 0, \\ C_{p+1} &\neq 0, \end{aligned}$$

我们就称差分算子 $\mathscr{L}$ 或相对应的线性多步法$\langle\rho,\sigma\rangle$的收敛阶为 p，$C_{p+1}/\sigma(1)$称为此方法的误差常数.

定义 2.3 倘使方法(1.1)的收敛阶 $p\geqslant 1$，我们称此方法是相容的.

显然方法(1.1)相容的充分必要条件为

$$C_0 = C_1 = 0,$$

或

$$\rho(1) = 0, \rho'(1) = \sigma(1).$$

定义 2.4 令

$$T_{n+k} \equiv \mathscr{L}[y(t_n); h],$$

则称 T_{n+k}为线性多步法(1.1)于 t_{n+k}处的局部截断误差.

倘使我们给线性多步法(1.1)以局部化假设：

$$y(t_{n+j}) = y_{n+j}, \qquad j = 0,1,\cdots k-1,$$

那末不难推出 T_{n+k}正比于$[y(t_{n+k}) - y_{n+k}]$.我们常称$[y(t_{n+k}) - y_{n+k}] = e_{n+k}$(没有局部化假设)为线性多步法(1.1)的总体截断误差.

下面给出零稳定的概念.

定义 2.5 设线性多步法$\langle\rho,\sigma\rangle$的第一特征多项式$\rho(\xi)$的根为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$，且$|\xi_j|\leqslant 1(j=1,2,\cdots,k)$，如果对某一个$j_0$，$|\xi_{j_0}|=1$时，$\xi_{j_0}$必为$\rho(\xi)$的单根，那末我们说方法$\langle\rho,\sigma\rangle$是零稳定的(或说是 Dahlquist 稳定的，或说方法(1.1)满足根条件).

定理 2.1 如果方法(1.1)是收敛的，那末它是零稳定的.

证明 考察方程

$$y'(t)=0,$$
$$y(0)=0,$$

其解$y(t)\equiv 0$. 用(1.1)去求解上列初值问题，得

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=0. \tag{2.5}$$

上列差分方程(2.5)之特征多项式为

$$\rho(\xi)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\xi^j. \tag{2.6}$$

假定(2.6)之零点互不相同，为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$，那末差分方程(2.5)的通解为

$$y_n=[d_1\xi_1^n+d_2\xi_2^n+\cdots+d_k\xi_k^n]h,$$

其中$d_i(i=1,2,\cdots,k)$为任意常数. 由于d_i之任意性，$y_n\to 0(n\to\infty)$当且仅当，对每一i

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}}h\cdot\xi_i^n=0,$$

即

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}}t\cdot\frac{\xi_i^n}{n}=0\Leftrightarrow|\xi_i|\leqslant 1.$$

如果(2.6)有重根，重数为q，那末通解中必有$d_s h n^q\xi_s^n$的项。由$y_n\to 0(n\to\infty)$再次推出

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}}h\cdot n^q\xi_s^n=0,$$

或

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} tn^{q-1}\xi_s^n = 0 \Leftrightarrow |\xi_s| < 1,$$

定理 2.1 证毕.

定理 2.2 倘使(1.1)收敛,那末(1.1)是相容的($p\geqslant 1$).

证明 先证 $C_0=0$. 为此考虑初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

其解为 $y(t)=1$. 我们用(1.1)去求解上列初值问题,得

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \cdots + \alpha_k y_{n+k} = 0. \tag{2.7}$$

再假设 $y_n=1, n=0,1,\cdots,k-1$. 因为(1.1)是收敛的,故

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ hn=t}} y_n = 1,$$

在(2.7)中令 $n\to\infty$,由此得

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0,$$

即 $C_0=0$. 再考虑方程

$$\begin{cases} y'(t) = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

其解为 $y(t)\equiv t$. 用(1.1)去求解上列初值问题,得

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \cdots + \alpha_k y_{n+k} = h[\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k]. \tag{2.8}$$

容易验证 $y_n = nh\kappa$ 为(2.8)的一个解序列,其中

$$\kappa = (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k)/(k\alpha_k + \cdots + \alpha_0),$$

注意到 $\rho'(1)\neq 0$,故上式有意义. 再注意(1.1)是收敛的,有

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} y_n = t,$$

于是

$$t\kappa = t,$$

故 $\kappa=1\Rightarrow\rho'(1)=\sigma(1)$. 定理 2.2 证毕.

定义 2.5 设$\{y_n\}$及$\{z_n\}$是(1.1)的两个解序列. 如果对任意正数 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,当

$$\max_{0\leqslant j\leqslant k-1} |z_j - y_j| \leqslant \delta, \quad 0 < h \leqslant h_0$$

时，总有

$$\max_{t_0\leqslant t_n\leqslant b} |z_n - y_n| \leqslant \epsilon,$$

那末我们就说(1.1)是稳定的.

定理 2.3 如果方法(1.1)是相容的，那末

(1.1) 是稳定的 ⇔(1.1) 是零稳定的.

证明 再次考虑初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = 0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

其解为 $y(t)\equiv 0$. 我们用(1.1)去求解上列方程，且取 $y_0 = y_1 = \cdots = y_{k-1} = 0$，得

$$y_n = 0, \qquad \forall n \in N.$$

再取初值 $z_0 = \epsilon, z_1 = \epsilon\xi_j, \cdots z_{k-1} = \epsilon\xi_j^{k-1}$，得

$$z_n = \epsilon\xi_j^n, \qquad \forall n \in N.$$

倘使 $\rho(\xi)$的某零点 $\xi_j, |\xi_j| > 1$，那末

$$\max_{0\leqslant t_n\leqslant b} |y_n - z_n| \leqslant \epsilon |\xi_j|^{N(h)},$$

这里 $N(h)$表示 $nh\leqslant b$ 的最大自然数. 显然当 $h\to 0$ 时 $N(h)\to\infty$. 从而

$$\max_{0\leqslant t_n\leqslant b} |y_n - z_n| \to \infty \quad (h\to 0),$$

这说明方法(1.1)不是稳定的，对于某 $\xi_j, |\xi_j| = 1$ 且是重根，也可类似证明.

反之，假设(1.1)是零稳定的，我们来证明方法是稳定的. 为了证明简明，我只针对方程 $y' = \lambda y$ 加以证明. 再假定 $\rho(\xi)$只有单根. 用(1.1)去求解 $y' = \lambda y$，得

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\lambda \sum_{j=0}^{k} \beta_j y_{n+j}, \tag{2.9}$$

令 $e_n = y_n - z_n$，且 $|e_n| \leqslant \epsilon, n = 0, 1, \cdots, k-1$. 由上式得

$$\sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - h\lambda\beta_j) e_{n+j} = 0. \tag{2.10}$$

只要 $h > 0$ 充分小，上列差分方程的特征方程之零点也是互异的，

它们是 $\xi_1(\overline{h}),\xi_2(\overline{h}),\cdots,\xi_k(\overline{h})$,其中$\overline{h}=h\lambda$,$\xi_i=\xi_i(0)(i=1,2,\cdots,k)$是 $\rho(\xi)$之零点,那末(2.10)的通解能表示为

$$e_n = \sum_{j=0}^{k} r_j[\xi_j(\overline{h})]^n, \quad n \geqslant 0. \tag{2.11}$$

写出(2.11)中当 $n=0,1,\cdots,k-1$ 时的方程,得

$$\begin{aligned}
&r_1 + r_2 + \cdots + r_k = e_0,\\
&r_1\xi_1(\overline{h}) + \cdots + r_k\xi_k(\overline{h}) = e_1,\\
&\quad\vdots\\
&r_1[\xi_1(\overline{h})]^{k-1} + \cdots + r_k[\xi_k(\overline{h})]^{k-1} = e_{k-1},
\end{aligned}$$

把 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 看成上列线性方程组的解,那末 r_i 将与右端e_0,$e_1,\cdots,e_{k-1}$有相同的界,注意定义 2.5 便可得

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k} | r_j | \leqslant C_1\varepsilon, \tag{2.12}$$

其中 C_1 为常数,已知 $\xi_j(\overline{h})(j=1,2,\cdots,k)$是方程

$$\rho(\xi) - \overline{h}\sigma(\xi) = 0 \tag{2.13}$$

的根.那末按扰动定理

$$\xi_j(\overline{h}) = \xi_j(0) + \overline{h}\,\frac{\sigma(\xi_j)}{\rho'(\xi_j)} + O(\overline{h}^2)$$

所以

$$\begin{aligned}
| \xi_j(\overline{h}) | &\leqslant | \xi_j | + | \lambda h | C_2\\
&\leqslant 1 + | \lambda h | C_2,
\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}
| \xi_j(\overline{h}) |^n &\leqslant [1 + | \lambda h | C_2]^n\\
&\leqslant e^{C_2 nh|\lambda|}\\
&\leqslant e^{C_2|\lambda|(b-t_0)},
\end{aligned}$$

再结合(2.11)及(2.12),便得

$$| e_n | \leqslant C_3 \cdot \varepsilon e^{C_2(b-t_0)|\lambda|}, \quad 0 < h \leqslant h_0,$$

这表明(1.1)是稳定的.定理 2.3 证毕.

定理 2.4 设方法(1.1)是相容的,则方法(1.1)是收敛的当且仅当它是零稳定的.

证明 收敛性推出零稳定性的证明可见定理 2.1 之证明. 现假设方法(1.1)是零稳定的, 我们来证明它是收敛的. 我们仍然只对方程 $y'(t)=\lambda y(t), y(0)=1$. 再假设 $\rho(\xi)$只有单重零点. 此时(1.1)的通解为

$$y_n = \sum_{j=1}^{k} r_j[\xi_j(\overline{h})]^n, \tag{2.14}$$

我们来证明

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} y_n = e^{\lambda t}.$$

为此我们将证明 $r_1[\xi_1(\overline{h})]^n \to e^{\lambda t}, (n\to\infty)$, 而(2.14)中其余各项趋于零, 再次使用扰动定理得

$$\xi_1(\overline{h}) = \xi_1 + \frac{\sigma(\xi_1)}{\rho'(\xi_1)}\overline{h} + O(\overline{h}^2).$$

由于(1.1)是相容的, 故 $\rho(1)=0$. 由此可令 $\xi_1=1$,

$$\xi_1(\overline{h}) = 1 + \frac{\sigma(1)}{\rho'(1)}\overline{h} + O(\overline{h}^2).$$

再因为相容性, 知 $\rho'(1)=\sigma(1)$, 从而

$$\begin{aligned}\xi_1(\overline{h}) &= 1 + \overline{h} + O(\overline{h}^2)\\ [\xi_1(\overline{h})]^n &= e^{nh\lambda}[1 + O(\overline{h}^2)]^n\\ &= e^{\lambda t}[1 + O(\overline{h})].\end{aligned}$$

故

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}}[\xi_1(\overline{h})]^n = e^{\lambda t}.$$

余下的只需证明 $r_1\to 1, (h\to 0)$. 由(2.14),

$$\begin{aligned}&r_1 + r_2 + \cdots + r_k = y_0,\\ &r_1\xi_1(\overline{h}) + \cdots + r_k\xi_k(\overline{h}) = y_1,\\ &\qquad\vdots\\ &r_1[\xi_1(\overline{h})]^{k-1} + \cdots + r_k[\xi_k(\overline{h})]^{K-1} = y_{k-1}.\end{aligned}$$

用 Cramer 法则来表示 r_1,

$$r_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & \xi_2(\bar{h}) & \cdots & \xi_k(\bar{h}) \\ \vdots & & & \\ y_{k-1} & \xi_2(\bar{h})^{k-1} & \cdots & \xi_k(\bar{h})^{k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1(\bar{h}) & \xi_2(\bar{h}) & \cdots & \xi_k(\bar{h}) \\ \vdots & & & \\ \xi_1(\bar{h})^{k-1} & \xi_2(\bar{h})^{k-1} & \cdots & \xi_k(\bar{h})^{k-1} \end{vmatrix}},$$

再注意 $y_\mu = y_\mu(h) \to 1, (h \to 0), \mu = 0, 1, \cdots, k-1$，及 $\xi_1(0) = 1$，故 $r_1 \to 1 (h \to 0)$. (2.14)中其余各项趋于零是显然的事. 定理 2.4 证毕.

推论 2.5　如果方法(1.1)是相容的，则(1.1)收敛的充分必要条件是(1.1)是稳定的.

推论 2.5 便是著名的 Lax 等价性定理.

§1.3　线性多步法的最高可达阶

对于线性多步法

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \tag{3.1}$$

若 $\beta_k \neq 0$，则方法是隐式的. 我们规范化 $\alpha_k = 1$，那末(3.1)中共有 $2k+1$ 个参数可供选定，我们要求其阶是 p，则要求满足 $p+1$ 个条件来确定 $\alpha_i, \beta_i (i = 0, 1, \cdots, k)$. 这样 $2k+1 = p+1$，粗略地看出 $p = 2k$. 当 $\beta_k = 0$ 时是显式方法，其阶可望达 $p = 2k-1$. 但前面的定理 2.4 指出，收敛的方法必须是零稳定的，一般不可能达 $2k$ 或 $2k-1$ 阶. 那末零稳定的线性多步法其最高可达阶是多少呢? 本节将回答这个问题.

首先讨论一个问题，给定多项式 $\rho(\xi)$，$\rho(1) = 0$，要求构造多项式 $\sigma(\xi)$，使得算子 $\mathscr{L}$ 的阶至少是 $k+1$，其中

$$\mathscr{L}[y(t); h] = \rho(E) y(t) - h\sigma(E) y'(t),$$

其中 E 为平移算子,$Ey(t)=y(t+h)$. 定义函数

$$\varphi(\xi) = [\log\xi]^{-1}\rho(\xi) - \sigma(\xi),$$

为使 $\log\xi$ 是单值的,我们将剪开负实轴. 我们再注意 $\rho(1)=0$,及 $\log 1=0$,故 $1/\log\xi$ 在 $\xi=1$ 处有一阶极点,而 $\varphi(\xi)$在 $\xi=1$ 处是正则的.

引理 3.1 由多项式 $\rho(\xi)$及 $\sigma(\xi)$决定的算子 $\mathscr{L}$,其阶为 p 的充分必要条件为$\varphi(\xi)$在 $\xi=1$ 处有 p 阶零点.

证明 设 $\mathscr{L}$的阶为 p,按定义,对光滑函数 $y(t)=\mathrm{e}^t$ 有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^t;h] &= \rho(E)\mathrm{e}^t - h\sigma(E)\mathrm{e}^t \\ &= \mathrm{e}^t[\rho(e^h) - h\sigma(e^h)] \\ &= \mathrm{e}^t C_{p+1}h^{p+1} + O(h^{p+2}).\end{aligned} \tag{3.2}$$

考虑函数 $f(h)=\rho(e^h)-h\sigma(e^h)$. 由于 $\mathrm{e}^t\neq 0$,知 $f(h)$在 $h=0$ 处有 $p+1$ 零点,那末 $f(h)/h$ 在$h=0$ 处为 p 阶零点. 做变换 $\xi=\mathrm{e}^h$,把 $h=0$ 的一个邻域映射为 $\xi=1$ 的一个领域,且是 $1-1$ 映射. 把 $h=\log\xi$ 代入$f(h)/h$,便知 $\varphi(\xi)$在 $\xi=1$ 处有 p 阶零点. 反之,若 $\varphi(\xi)$在 $\xi=1$ 处有 p 阶零点,那末 $f(h)=h\varphi(e^h)$在 $h=0$ 处有 $p+1$ 阶零点,即 $\rho(e^h)-h\sigma(e^h)$于 $h=0$ 处为 $p+1$ 阶零点,从而 $C_0=C_1=\cdots=C_p=0$,$C_{p+1}\neq 0$,即 $\mathscr{L}$之阶为 p. 引理 2.1 证毕.

定理 3.1 令 $\rho(\xi)$为 k 次多项式,且 $\rho(1)=0$,若 $0\leqslant k'\leqslant k$,于是存在唯一多项式 $\sigma(\xi)$,其次数$\leqslant k'$使得 $\mathscr{L}$之阶至少为 $k'+1$.

证明 因为函数$(\log\xi)^{-1}\rho(\xi)$于 $\xi=1$ 处正则,故可展开为 Taylor 级数:

$$(\log\xi)^{-1}\rho(\xi) = C_0 + C_1(\xi-1) + C_2(\xi-1)^2 + \cdots,$$

置

$$\sigma(\xi) = C_0 + C_1(\xi-1) + \cdots + C_{k'}(\xi-1)^{k'}, \tag{3.3}$$

于是 $\varphi(\xi)=(\log\xi)^{-1}\rho(\xi)-\sigma(\xi)$在 $\xi=1$ 处至少有 $k'+1$ 阶零点,按引理 3.1$\mathscr{L}$之阶至少是 $k'+1$.

假设 $\mathscr{L}$之阶至少是 $k'+1$,则 $\varphi(\xi)$在 $\xi=1$ 处至少是 $k'+1$

阶零点,从而 $\sigma(\xi)$ 只好有(3.3)之形式,故 $\sigma(\xi)$ 是唯一的.定理3.1证毕.

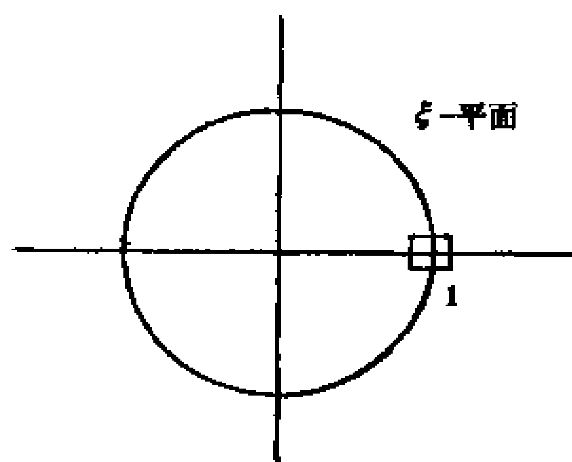


图 1.1

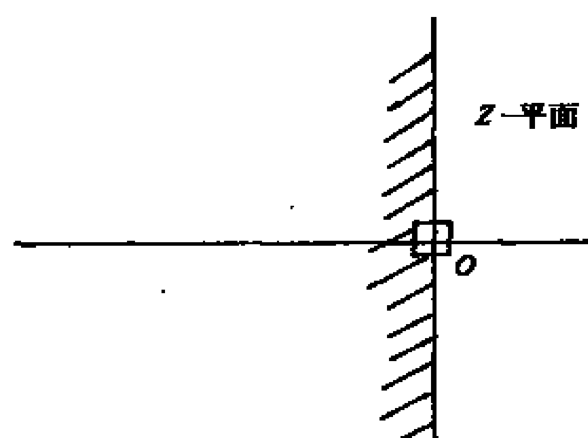


图 1.2

Dahlquist 在 1956 年曾证明,零稳定的线性多步法,当 k 为偶数时,最多可达 $k+2$ 阶,当 k 为奇数时,最高可达 $k+1$ 阶.为证明上述结果,令

$$z = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad \xi = \frac{1 + z}{1 - z},$$

则

$$|\xi|<1 \quad 映射为 \quad \mathrm{Re}(z)<0,$$
$$\xi=1 \quad 映射为 \quad z=0,$$
$$\xi=-1 \quad 映射为 \quad z=\infty.$$

构造函数

$$r(z)=\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \rho\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

及

$$S(z)=\left(\frac{1-z}{2}\right)^k \sigma\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

因为 $z=0$,即 $\xi=1$ 是 $\rho(\xi)$之单根,故

$$r(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots+a_kz^k,$$

其中 $a_1\neq 0$.不妨设 $a_1>0$.我们先证明 $a_\mu\geqslant 0(\mu=1,2,\cdots,k)$.为此用 $x_\nu+iy_\nu$ 表示 $r(z)$之零点,其中 x_ν,y_ν 为实数.则

$$r(z)=a_l\prod_\lambda(z-x_\lambda)\prod_\mu[(z-x_\mu)^2+y_\mu^2],$$

因为 $\rho(\xi)$满足根条件且 $r(z)$与 $\rho\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$有相同的零点,但 $\rho(\xi)$之零点位于单位圆盘上,则

$$|\xi_j|\leqslant 1\Rightarrow \mathrm{Re}(z_j)\leqslant 0.$$

从而

$$\chi_\nu \text{ 及 } \chi_\mu\leqslant 0,$$

进而 $r(z)$中一切不为零的系数将与 a_l 同号,但 $a_1>0$ 故 $a_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,k)$.

再考虑函数

$$p(z)=\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\varphi\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$
$$=\frac{1}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}r(z)-S(z),$$

那末 $p(z)$于 $z=0$ 处有 p 阶零点等价于$\psi(\xi)$于 $\xi=1$ 处有 p 阶零点.假定$\mathscr{L}$之阶为 p,故 $\psi(\xi)$于 $\xi=1$ 处有 p 阶零点.此时必有

$$S(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_{p-1}z^{p-1}, \tag{3.4}$$

这里假定

$$\frac{z}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}\cdot\frac{r(z)}{z}=b_0+b_1z+\cdots+b_{p-1}z^{p-1}+\cdots.$$

因为 $S(z)$ 的次数 $\leqslant k$，倘 $p>k+1$，必有

$$b_{k+1}=b_{k+2}=\cdots=b_{p-1}=0.$$

可以验证

$$\frac{z}{\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}=C_0+C_2z^2+C_4z^4+\cdots.$$

于是

$$\begin{aligned}&(C_0+C_2z^2+\cdots)(a_1+a_2z^1+\cdots+a_kz^k)\\&=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots.\end{aligned}$$

上式中比较 z 的同次幂得

$$\begin{cases}b_0=C_0a_1,\\b_1=C_0a_2,\\b_{2\nu}=C_0a_{2\nu+1}+C_2a_{2\nu-1}+\cdots+C_{2\nu}a_1,\\b_{2\nu+1}=C_0a_{2\nu+2}+C_2a_{2\nu}+\cdots+C_{2\nu}a_2\end{cases}\tag{3.5}$$

$$(\nu=1,2,\cdots).$$

假设 k 为奇数，则从(3.5)中第三式得

$$b_{k+1}=C_2a_k+C_4a_{k-2}+\cdots+C_{k+1}a_1,$$

可以验证 $C_{2\nu}<0$，$(\nu=1,2,\cdots)$，又因 $a_\mu\geqslant0$，故 $b_{k+1}<0$，这矛盾于 $b_{k+1}=b_{k+2}=\cdots=b_{p-1}=0$. 故 $p\leqslant k+1$.

倘 k 为偶数，从(3.5)中最后一式得

$$b_{k+1}=C_2a_k+C_4a_{k-2}+\cdots+C_ka_2,$$

同样因为 $C_{2\nu}<0$ 及 $a_\mu\geqslant0$，若 $b_{k+1}=0$ 导致

$$a_2=a_4=\cdots=a_k=0,$$

从而导致 $r(z)$ 为奇函数，即 $r(-z)=-r(z)$. 因为 $r(z)$ 之零点 z_μ 满足 $\mathrm{Re}(z_\mu)\leqslant0$；但 $-z_\mu$ 亦为零点，故 $\mathrm{Re}(z_\mu)=0$，即 $r(z)$ 之

零点位于虚轴上，即 $\rho(\xi)$之零点位于单位圆上. 并且因为 $a_2=a_4=\cdots=a_k=0$，故 $r(z)$之次数至多为 $k-1$. 当 k 为偶数时，我们证明 $\mathscr{L}$之阶不能超过 $k+2$. 倘 $p>k+2$，那末

$$b_{k+2} = C_4 a_{k-1} + \cdots + C_{k+2} a_1 = 0.$$

因为 $C_{2\nu}<0, a_{2\mu}\geqslant 0, a_1>0$ 导致 $b_{k+2}<0$，这是矛盾的，故 $p\leqslant k+2$. 至于 $C_{2\nu}<0$ 之结果，可见 Henriei 的书[11]. 把上面的讨论总结为如下定理：

定理 3.2 设 $\rho(\xi), \sigma(\xi)$为两个 k 次多项式，$\mathscr{L}$为与这两个多项式相联系的差分算子，$\rho(\xi)$满足根条件，则 $\mathscr{L}$的阶 p 不能超过$k+2$；$p=k+2$ 的充分必要条件为 k 是偶数，$\rho(\xi)$之零点皆在单位圆周上以及 $\sigma(\xi)$由(3.4)式决定.

§1.4 线性多步法的 A 稳定性

对于线性多步法$\langle\rho,\sigma\rangle$

$$\rho(E)y_n = h\sigma(E)f_n, \tag{4.1}$$

为了控制求解过程中的舍入误差的传播，必须研究其数值稳定性，一般让(4.1)去求解下列试验方程，看看其解序列是否趋于零，

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \quad \mathrm{Re}(\lambda) < 0, \\ y(t_0) = \eta. \end{cases} \tag{4.2}$$

定义 4.1 如果对任意 λ，满足 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$，及任意步长$h>0$，用(4.1)求解(4.2)时，产生的解序列$\{y_n\}$满足

$$\lim_{k\to\infty} y_n = 0,$$

那末我们就称多步法(4.1)或$\langle\rho,\sigma\rangle$是 **A 稳定的**.

令

$$C^- = \{\bar{h} : \mathrm{Re}(\bar{h}) < 0\} \tag{4.3}$$

及

$$S = \{\bar{h} : \rho(Z) - \bar{h}\sigma(Z)\ \text{是 Schur 多项式}\}, \tag{4.4}$$

其中$\bar{h}=\lambda h$. 我们把集合 S 称为(4.1)之**绝对稳定集**. 显然

$$\langle\rho,\sigma\rangle\ \text{是 A 稳定的} \Leftrightarrow S \supseteq C^-.$$

例 考察如下线性 θ 方法的数值稳定性：

$$y_{n+1} = y_n + h\theta f_{n+1} + h(1-\theta)f_n. \tag{4.5}$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant1, f_n = f(t_n, y_n)$.

我们用(4.5)去解(4.2),得递推关系：

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda\theta y_{n+1} + h\lambda(1-\theta)y_n$$

或

$$(1-\bar{h}\theta)y_{n+1} = (1+\bar{h}(1-\theta))y_n,$$

即

$$y_{n+1} = \frac{1+\bar{h}(1-\theta)}{1-\theta\bar{h}}y_n,$$

那末对任意$\bar{h}$,$\mathrm{Re}(\bar{h})<0$,有

$$\lim_{h\to\infty} y_n = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1+(1-\theta)\bar{h}}{1-\theta\bar{h}}\right| < 1.$$

因为

$$\left|\frac{1+(1-\theta)\bar{h}}{1-\theta\bar{h}}\right|^2 = \frac{[1+(1-\theta)\mathrm{Re}(\bar{h})]^2 + [(1-\theta)\mathrm{Im}(\bar{h})]^2}{[1-\theta\mathrm{Re}(\bar{h})]^2 + [\theta\mathrm{Im}(\bar{h})]^2}$$

$$< 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1.$$

当 $\theta = \frac{1}{2}$时,称方法为梯形公式.

有时用pade′逼近来判别一个方法是否为 A 稳定的是方便的.命

$$\mathrm{e}^z = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}z^i \sim \sum_{i=0}^{S}a_i z^i \Big/ \sum_{i=0}^{T}b_i z^i$$

$$\equiv R_T^S(z),$$

如果

$$R_T^S(z) = \mathrm{e}^z + \mathrm{O}(z^{S+T+1}),$$

我们称 $R_T^S(z)$是 e^z 的$S+T$ 阶有理逼近.

为了决定 $a_i, b_j(a_0 = b_0 = 1, i = 1\sim s, j = 1\sim T)$,令

$$\sum_{i=0}^{S}a_i z^i = \left\{\sum_{i=0}^{T}b_i z^i\right\}\left\{\sum_{i=0}^{S+T}\frac{1}{i!}z^i\right\}$$

比较 z^i 之系数来决定 a_i 与 b_j.

定义 4.2 如果 $R_T^S(z)$ 是 e^z 的 $S+T$ 阶有理逼近，则说，$R_T^S(z)$ 是 e^z 的 **pade′逼近**. 如果还有 $S=T$，则称 $R_T^S(z)$ 是 e^z 的**对角 pade′逼近.**

定理 4.1[26](Birkhoff-Varga) 设 $R_T^S(z)$ 是 e^z 的 Pade′逼近，且 $S=T$ 及 $\mathrm{Re}(z)<0$，则

$$|R_T^S(Z)|<1.$$

为了以后的需要，我们列出下面的明显的等价命题.

定理 4.2 下列命题等价

(a)线性多步法 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 是 A 稳定的，

(b)$\mathrm{Re}(\overline{h})<0\Rightarrow\rho(z)-\overline{h}\sigma(z)$ 是 Schur 多项式，

(c)$|z|\geqslant1\Rightarrow\mathrm{Re}\left[\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}\right]\geqslant0$.

关于线性多步法的 A 稳定性及其他有用的稳定性有非常丰富的研究成果，我们只给出一些常用的结果，特别是，1962 年 Dahlquist 给出的“悲观性定理”，即 A 稳定的线性多步法其最高可达阶为 2，其中梯形公式之误差常数最小.

定理 4.3 线性多步法 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 为 A 稳定的必要条件为

(i)$\sigma(\xi)$ 的一切零 ξ_j 满足 $|\xi_j|\leqslant1(j=1,2,\cdots,k)$，充分必要条件为

(ii)若 $\xi\in W\Rightarrow\mathrm{Re}\left[\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)}\right]\geqslant0$,

其中 $W=\{\xi:|\xi|>1\}$.

证明 必要性，设 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 是 A 稳定的，按定理 4.2(c)，(ii)显然成立. 再证(i)成立. 我们总假定 ρ,σ 是不可约的两个多项式，若 ξ_j 是 $\sigma(\xi)$ 之某零点，则它不是 $\rho(\xi)$ 之零点. 映射 $\overline{h}=\rho(\xi)/\sigma(\xi)$ 把 ξ 平面上的 ξ_j 映为 $\overline{h}$ 平面上的 Riemann 球面的北极 ∞，而 ξ_j 的一个邻域映为 ∞ 的一个邻域，但 ∞ 的每个领域中总包含 $\overline{h}$，$\mathrm{Re}(\overline{h})<0$. 倘使(i)不真，即存在 $\xi_j\in W$，可找到 ξ_j 的一个邻域 $U\subset W$. 此邻域之像为 ∞ 的某个邻域. 可取一点 $\xi\in U$ 使其像 $\overline{h}$ 满

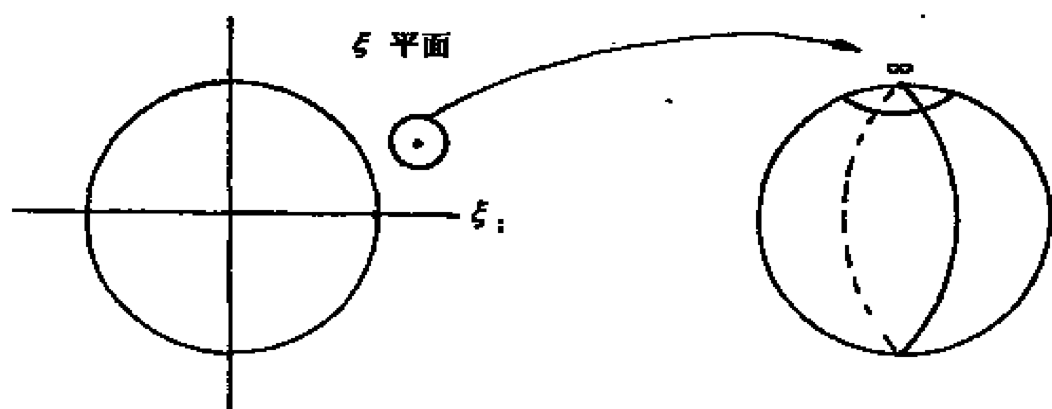


图 1.3

足 $\mathrm{Re}(\overline{h})<0$,对这样的 $\xi,\overline{h}$,多项式 $\rho(z)-\overline{h}\sigma(z)$有一零点 ξ,满足 $|\xi|>1$,但这与定理 4.2(b)是矛盾的.

再证充分性.我们来验证(ii)⇒(c).按本定理假设,$\xi\in W$ 时定理 4.2(c)自然成立,令 $|\xi_0|=1$.

情况 a,$\sigma(\xi_0)\neq 0$.

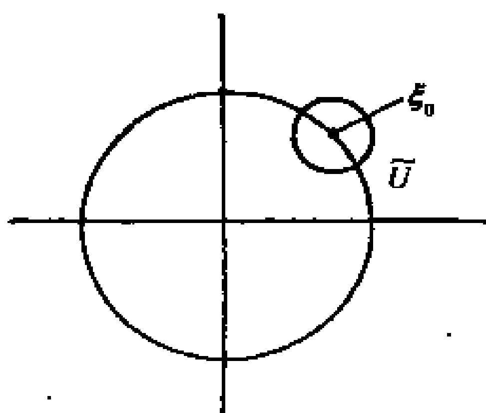


图 1.4

假定(c)不真,即 $\mathrm{Re}[\overline{h}(\xi_0)]<0$,那末 ξ_0 的充分小的领邻域 $\widetilde{U}$ 将映为 $\overline{h}$ 平内 $\overline{h}(\xi_0)$ 一个邻域 $V\subset C^-$,此时存在 $\xi\in\widetilde{U}$ 且 $\xi\in W$,其像 $\overline{h}(\xi)\in V$,即 $\mathrm{Re}[\overline{h}(\xi)]<0$,它与(ii)是矛盾的.

情况 b,$\sigma(\xi_0)=0$.

此时 $\overline{h}(\xi_0)=\infty$,它是虚轴上的点,故 $\mathrm{Re}[\overline{h}(\xi_0)]=0$,故(c)成立.定理 4.3 证毕.

定理 4.4 设 ξ_0 是 $\sigma(\xi)$之零点,$|\xi_0|=1$,重数 $m\geqslant 2$,则 $\langle\rho,\sigma\rangle$不可能是 A 稳定的.

证明 令

$$\overline{h}=\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)},$$

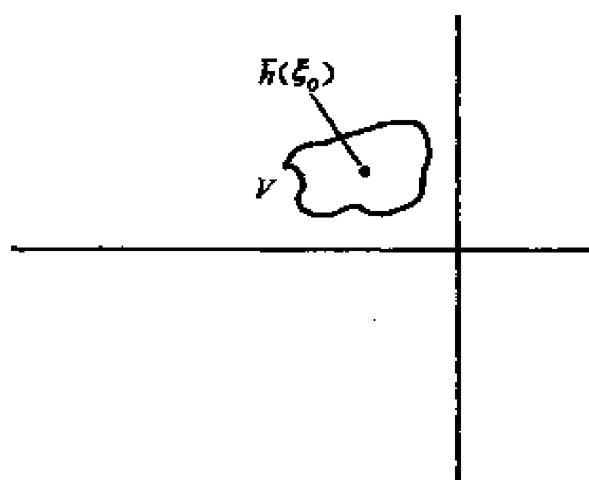


图 1.5

因为 ξ_0 是 $\sigma(\xi)$ 之 m 重根，又不是 $\rho(\xi)$ 之零点，故可把 $\bar{h}(\xi)$ 展开为 Laurent 级数

$$\bar{h}(\xi) = \text{Const}(\xi - \xi_0)^{-m}(1 + O(1)).$$

因为 $m \geqslant 2$，$\bar{h}(\xi)$ 把 ξ 平面上的一个扇形 S，它以 ξ_0 为顶点，夹角 $\alpha = 2\pi/m$，映射为 Riemann 球面北极 ∞ 的一个邻域 N，即 $S \to N$。又因为 $\alpha \leqslant \pi$，可使整个 S 位于单位圆的外部，因此可找到一点 $\xi^* \in S$ 使得 $|\xi^*| > 1$，且 $\text{Re}[\bar{h}(\xi^*)] < 0$，即 $\xi^* \in W \Rightarrow \text{Re}\left[\frac{\rho(\xi^*)}{\sigma(\xi^*)}\right] < 0$，这与定理 4.3 中的(ii)违背. 定理 4.4 证毕.

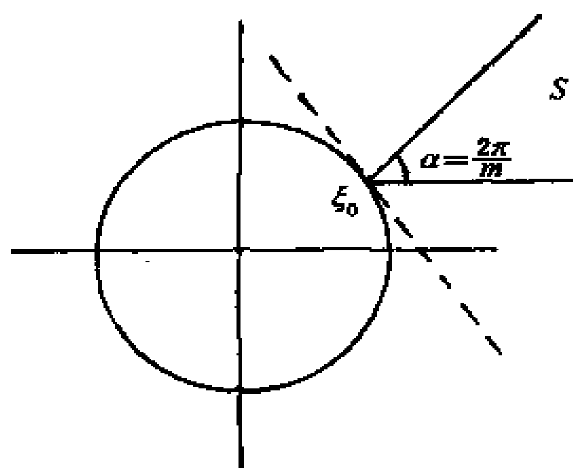


图 1.6

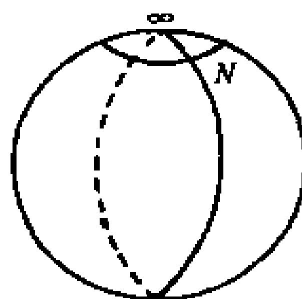


图 1.7

定理 4.5 倘使

(1)$\sigma(\xi)$之零点 σ_i 满足$|\sigma_i|<1, i=1,2,\cdots,k$,

(2)$|\xi|=1 \Rightarrow \mathrm{Re}\left[\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)}\right] \geqslant 0$,

于是,$\langle\rho,\sigma\rangle$是 A 稳定的.

证明 由(1)指明$\overline{h}(\xi)=\rho(\xi)/\sigma(\xi)$在 W 之闭包 $\overline{W}$ 上解析,解析函数$\overline{h}(\xi)$的实部 $\mathrm{Re}[\rho(\xi)/\sigma(\xi)]$在 $\overline{W}$ 上是调和函数,它在定义域的边界上达最大与最小(Complex Analysis, Ch. 5, Ahlfors, 1955),故

$$U(\xi)=\mathrm{Re}\left[\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)}\right] \geqslant \min_{|\xi|=1} U(\xi).$$

注意(2),便得

$$U(\xi) \geqslant 0, \quad \xi \in \overline{W}$$

利用定理 4.2 中的(c)便获得证明.

例 1 梯形公式的 A 稳定性.

我们用定理 4.3,再次证明梯形公式之 A 稳定性,令

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f_n+f_{n+1}],$$

则

$$\rho(\xi)=\xi-1, \sigma(\xi)=\frac{1}{2}[1+\xi],$$

$$\mathrm{Re}\,\overline{h}(\xi)=\frac{|\xi|^2-1}{|\xi+1|^2}>0, \quad \forall \xi \in W.$$

例 2 向后 Euler 公式的 A 稳定性.

令

$$y_{n+1}=y_n+hf_{n+1},$$

则

$$\rho(\xi)=\xi-1, \quad \sigma(\xi)=\xi,$$

$$\mathrm{Re}\,\overline{h}(\xi)=\frac{|\xi|^2-\mathrm{Re}(\xi)}{|\xi|^2}>0, \quad \forall \xi \in W.$$

例 3 令

$$y_{n+k} = y_n + \frac{1}{2}hk(f_{n+k} + f_n),$$

则

$$\rho(\xi) = \xi^k - 1,\quad \sigma(\xi) = \frac{1}{2}k(\xi^k + 1),$$

$$\mathrm{Re}\,\overline{h}(\xi) = \frac{1}{2}k\frac{|\xi|^{2k} - 1}{|\xi^k + 1|^2} > 0,\quad \forall \xi \in W.$$

定义 4.2 设 W_α 是左半平面上的一个扇形，

$$W_\alpha = \{\overline{h}: -\alpha < \pi - \arg\overline{h} < \alpha\},$$

若 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 的稳定集 S 满足

$$S \supseteq W_\alpha,$$

那末就称 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 是 **$A(\alpha)$ 稳定的**；又若 $S\supseteq$ 负实轴，就说 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 是 **A_0 稳定的**.

对于 $A(\alpha)$ 稳定性，与 A 稳定性一样，我们有如下等价性命题.

定理 4.6 下列陈述是等价的

(i) $\langle\rho,\sigma\rangle$ 是 $A(\alpha)$ 稳定的，

(ii) $\overline{h}\in W_\alpha \Rightarrow \rho(\xi) - \overline{h}\sigma(\xi)$ 是 Schur 多项式，

(iii) $|\xi|\geqslant 1 \Rightarrow \frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)} \overline{\in} W_\alpha$.

关于 A_0 稳定性，有如下定理：

定理 4.7 若 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 是 A_0 稳定的，则

(i) $\rho(\xi)$ 及 $\sigma(\xi)$ 之零点皆位于单位圆盘 D 上，

(ii) $\rho(\xi)$ 在单位圆盘 D 的边界 δD 上零点之重数 $m\leqslant 2$.

证明 由于 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 是 A_0 稳定的，故当 $\overline{h}\in(-\infty,0)$ 时 $\rho(\xi) - \overline{h}\sigma(\xi)$ 是 Schur 多项式，即零 $\xi(\overline{h})$ 满足

$$|\xi(\overline{h})| < 1,$$

那末

$$\lim_{\overline{h}\to 0}|\xi(\overline{h})| = |\xi(0)| \leqslant 1,$$

其中 $\xi(0)$ 为 $\rho(\xi)$ 之零点. 类似地

$$\lim_{\bar{h}\to-\infty} |\xi(\bar{h})| = |\sigma_i| \leqslant 1,$$

其中 σ_i 为 $\sigma(\xi)$ 之零点.(Ⅰ)证毕.

对于(Ⅱ),设 $\bar{\xi}$ 是 $\sigma(\xi)$ 之零点且 $|\bar{\xi}|=1$,重数 m,我们来证明 $m\leqslant 2$.

由于 $\bar{\xi}$ 是 $\sigma(\xi)$ 之 m 重零点,但不是 $\rho(\xi)$ 之零点,把 $\bar{h}(\xi)=\rho(\xi)/\sigma(\xi)$ 在 $\bar{\xi}$ 处展成 Laurent 级数,则

$$\bar{h}(\xi) = \frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)} \sim a(\xi - \bar{\xi})^{-m},$$

其中 a 是某一常数.

我们注意到 A_0 稳定性也有如下等价形式

(i) $\langle\rho,\sigma\rangle$ 是 A_0 稳定的,

(ii) $\bar{h}\in(-\infty,0)\Rightarrow\rho(\xi)-\bar{h}\sigma(\xi)$ 是 Schur 多项式,

(iii) $|\xi|\geqslant 1\Rightarrow\dfrac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)}\overline{\in}(-\infty,0)$.

因为 $m\geqslant 2$,类似于定理 4.4 之证明,映射 $\bar{h}=\rho(\xi)/\sigma(\xi)$ 把 ξ 平面上的一个扇形(它以 $\bar{\xi}$ 为顶点,夹角为 $\alpha=2\pi/m$)映为Riemann球面上北极∞的一个邻域.因为夹角 $\alpha\leqslant\pi$,可使整扇形位于单位圆外面,因此可找到一点 ξ 属于扇形,使得 $|\xi|>1$,且 $\bar{h}(\xi)=\rho(\xi)/\sigma(\xi)\in(-\infty,0)$,但这是与上面(iii)相违背的.

定理 4.8 显式多步法不可能是 A 稳定的;A 稳定的隐式多步法中其阶 $p\leqslant 2$,在 $p=2$ 的方法中,梯形公式的误差常数最小.

证明 先证明显式方法不可能是 A 稳定的.不妨设 $\alpha_k=1,\beta_k=0,\beta_{k-1}\neq 0$.多项式 $\rho(\xi)-\bar{h}\sigma(\xi)$ 之零点为 $\xi_1(\bar{h}),\xi_2(\bar{h}),\cdots,\xi_k(\bar{h})$.故

$$\rho(\xi)-\bar{h}\sigma(\xi) = (\xi-\xi_1(\bar{h}))(\xi-\xi_2(\bar{h}))\cdots(\xi-\xi_k(\bar{h})).$$

由 Viete(韦达)定理,

$$\sum_{j=1}^{k}\xi_j(\bar{h}) = -(\alpha_{k-1}-\bar{h}\beta_{k-1}),$$

令 $\bar{h}\to\infty$,则 $(\alpha_{k-1}-\bar{h}\beta_{k-1})\to\infty$,那末 $\xi_1(\bar{h}),\cdots,\xi_k(\bar{h})$ 不能总落在单位圆内部,即 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 不可能是 A 稳定的.

令

$$f(h) = \rho(e^h) - h\sigma(e^h),$$
$$\varphi(\xi) = [\ln\xi]^{-1}\rho(\xi) - \sigma(\xi),$$
$$\xi = e^h,$$

则

$$f(h) = h\varphi(e^h).$$

从引理 3.1 之证明知，如果$\langle\rho,\sigma\rangle$的阶为 p，那末 $f(h)$在 $h=0$ 处有 $p+1$ 阶零点，即

$$\rho(e^h) - h\sigma(e^h) \sim C_{p+1}h^{p+1}, \qquad (h \to 0),$$

或者

$$\rho(\xi) - \ln\xi\sigma(\xi) \sim C_{p+1}[\ln\xi]^{p+1}, \quad (\xi \to 1),$$
$$\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)} - \ln\xi \sim C_{p+1}[\ln\xi]^{p+1}/\sigma(\xi), \quad (\xi \to 1).$$

那末

$$\lim_{\xi\to1}\left[\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)} - \ln\xi\right]\Big/(\xi-1)^{p+1} = C_{p+1}/\sigma(1) \equiv -C_{p+1}^*.$$

令

$$C^* = C_{p+1}^* = \lim_{\xi\to1}\left[\ln\xi - \frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)}\right]\Big/(\xi-1)^{p+1}. \qquad (4.6)$$

作变换

$$z = \frac{\xi+1}{\xi-1}, \quad \xi = \frac{z+1}{z-1}. \qquad (4.7)$$

记

$$\tilde{r}(z) = \left(\frac{z-1}{2}\right)^k\rho\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \qquad (4.8)$$

$$\tilde{S}(z) = \left(\frac{z-1}{2}\right)^k\sigma\left(\frac{z+1}{z-1}\right). \qquad (4.9)$$

由变换(4.7)知

$$\xi \to 1 \Leftrightarrow z \to \infty,$$
$$\xi - 1 = \frac{2}{z-1} \sim \frac{2}{z}, \quad (z \to \infty).$$

由(4.6)式知

$$\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-\frac{\widetilde{r}(z)}{\widetilde{S}(z)}\sim C^{*}\left(\frac{2}{z}\right)^{p+1},\quad(z\to\infty).$$

因为

$$\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=2z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-3}+O(z^{-4}),\quad(z\to\infty).$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{r}(z)}{\widetilde{S}(z)}&=2z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-3}+O(z^{-4})-C^{*}\left[\frac{2}{z}\right]^{p+1}\\&=2z^{-1}+\left[\frac{2}{3}-8C'\right]z^{-3}+O(z^{-4}),\end{aligned}\qquad(4.10)$$

其中

$$C'=\begin{cases}C^{*}, & p=2\\0, & p\geqslant 3.\end{cases}$$

由定理 4.3 及变换(4.7),当$\langle\rho,\sigma\rangle$是 A 稳定时,

(i)S_i 是 $\widetilde{S}(z)$的零点$\Rightarrow\mathrm{Re}(S_i)\leqslant 0$,

(ii)$\mathrm{Re}(z)\geqslant 0\Rightarrow\mathrm{Re}\left[\frac{\widetilde{r}(z)}{\widetilde{S}(z)}\right]\geqslant 0$.

先验明如下辅助定理的条件

定理 (Riesz-Herglotz).设

(a)$\sup\limits_{0<x<\infty}(x\cdot\phi(x))<\infty$,

(b)$\mathrm{Re}(z)>0$ 时,$\phi(z)$正则,

(c)$\mathrm{Re}(z)>0$ 时,$\mathrm{Re}(\phi(z))\geqslant 0$,则

$$\phi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{z-\mathrm{i}t},$$

其中 $\omega(t)$为 t 的有界不减函数.

我们用(i)~(ii)来检验(a)~(c).令

$$\phi(z)=\widetilde{r}(z)/\widetilde{S}(z).\qquad(4.11)$$

由(4.10)式,当 $x\to\infty$时,$x\cdot\phi(x)$有界,又因$\langle\rho,\sigma\rangle$是 A 稳定的,倘$|\xi|=1$,则 ξ 只能是$\sigma(\xi)$之单根,$\xi=-1$ 只能是 $\sigma(\xi)$之单根,那末 $z=0$ 只能是 $\widetilde{S}(z)$之单根.由此推出 $x\widetilde{r}(x)/\widetilde{S}(x)$在 $x=$

0 处有穷. 再由(i), $x>0$ 不是 $\widetilde{S}(x)$ 之零点, 故 $x>0$ 时, $x\widetilde{r}(x)/\widetilde{S}(x)$ 正则. 综上所述

(a) $\sup\limits_{0<x<\infty}|x\varphi(x)|<\infty$.

(b) 由(i), 若 $\mathrm{Re}(z)>0$, $\widetilde{S}(z)$ 无零点, 故 $\phi(z)$ 在右半平面正则.

(c) 由(ii), $\mathrm{Re}(z)>0\Rightarrow \mathrm{Re}(\phi(z))\geqslant 0$.

条件(a)~(c)对(4.11)定义 $\phi(z)$ 全部成立. 所以

$$x\frac{\widetilde{r}(x)}{\widetilde{S}(x)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x-\mathrm{i}t}\mathrm{d}\omega(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^2+t^2}\mathrm{d}\omega(t).$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x^2}{x^2+t^2}\right]=\frac{2xt^2}{(x^2+t^2)^2}\geqslant 0\quad(x\geqslant 0),$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\widetilde{r}(x)}{\widetilde{S}(x)}\right]\geqslant 0.$$

由(4.10), 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\widetilde{r}(x)}{\widetilde{S}(x)}\right]=-2\left(\frac{2}{3}-8C'\right)x^{-3}+O(x^{-4})\geqslant 0.$$

令 x 充分大, 得

$$\frac{2}{3}-8C'\leqslant 0.$$

倘 $p\geqslant 3$, 于是 $C'=0\Rightarrow\frac{2}{3}\leqslant 0$, 矛盾.

由此可知 $p\leqslant 2$ 及

$$\frac{2}{3}-8C^*\leqslant 0,$$

即

$$C^*\geqslant\frac{1}{12}.$$

对于梯形公式, 有

$$\rho(\xi)=\xi-1,\quad \sigma(\xi)=\frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$\widetilde{r}(z)=1,\quad \widetilde{S}(z)=z/2,$$

所以

$$\frac{\widetilde{r}(z)}{\widetilde{S}(z)}=\frac{2}{z}$$

注意到(4.10),我们断定 $2/3-8C^*=0$,或 $C^*=1/12$.这便完成了定理 4.8 的证明.

第二章　Runge-Kutta 方法

§2.1　Runge-Kutta 方法的阶条件

Runge-Kutta 方法是在 1900 年前后由 Runge 和 Kutta 最早提出的，但直到 1960 年以后才由 Butcher 和 Burrage 发展和完善了这类方法.为了简单起见，我们先讨论所谓显式方法，对于方程

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

已知初值 y_0，使用步长 $h>0$，我们要求近似值 $y_1 \sim y(t_1)$，$t_1 = t_0 + h$.方法如下：

$$\begin{cases} k_1 = f(t_0, y_0), \\ k_i = f(t_0 + C_i h, y_0 + h \sum\limits_{j<i} a_{ij} k_j), \quad i = 2 \sim S, \\ y_1 = y_0 + h \sum\limits_{i=1}^{S} b_i k_i, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $C_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}$.

如果存在常数 $k>0$，使得

$$\| y(t_0 + h) - y_1 \| \leqslant k h^{p+1},$$

就称此 Runge-Kutta 方法是 p 阶的.

1964 年 Butcher 把上述方法用表格来表示

$$\begin{array}{c|ccccc} O & & & & & \\ C_2 & a_{21} & & & & \\ C_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \cdots & & & & \\ C_S & a_{S1} & a_{S2} & \cdots & a_{SS-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{S-1} & b_S \end{array} \tag{1.3}$$

，

或简写为

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & b^T \end{array} \quad . \tag{1.4}$$

现在的问题是,如何选择矩阵 A 及向量 b, c,使得(1.2)有较高的阶.为此我们把(1.1)写为自治系统的形式

$$\begin{cases} y'(t) = f(y), & y, f(y) \in R^n, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

再令 $k_i = f(g_i), i = 1 \sim s$,则(1.2)能改写为

$$\begin{cases} g_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(g_j), i = 1 \sim S, \\ y_1 = y_0 + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(g_j), \end{cases} \tag{1.6}$$

把上面的(1.6)式写成分量的形式

$$\begin{cases} g_i^J = y_0^J + h \sum_{j<i} a_{ij} f^J(g_j^1, g_j^2, \cdots, g_j^n), i = 1 \sim S, \\ y_1^J = y_0^J + h \sum_{j=1}^{S} b_j f^J(g_j^1, g_j^2, \cdots, g_j^n), \end{cases} \tag{1.7}$$

这里 y_0^J, y_1^J, g_i^J,分别表示 n 维向量 y_0, y_1, g_j 之第 J 个分量, $J = 1, 2, \cdots, n$.

为了确定方法中的 A 及 b,使得方法有阶 p,我们设法使用 Taylor 公式

$$y(h) = y_0 + hy'(0) + \frac{h^2}{2!} y''(0) + \cdots. \tag{1.8}$$

按 Runge-Kutta 方法,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(g_j) \\ &= y_0 + h\phi(h), \end{aligned} \tag{1.9}$$

也可看成 h 的函数,将它在 $h = 0$ 处展成 Taylor 级数,然后与(1.8)式中的 h 的同次幂比较,便可设法求出 a_{ij} 与 b_j. 注意到(1.7)式中的第一式与第二式有相同的形式(a_{ij} 与 b_j 对应),因此

对 g_i 求全导数.注意公式

$$[h\phi(h)]_{h=0}^{(q)} = q[\phi(h)]_{h=0}^{(q-1)}, \tag{1.10}$$

由(1.7)中第一式,对 h 求导,得

$$q = 0, \quad (g_i^J)_{h=0}^{(0)} = y_0^J, \tag{1.11}$$

$$q = 1, \quad (g_i^J)_{h=0}^{(1)} = \sum_{j<i} a_{ij} f^J_{y=y_0}, \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} q = 2, \quad (g_i^J)_{h=0}^{(2)} &= 2\sum_{j<i} a_{ij} f^J (g_i)^{(1)} \\ &= 2\sum_{j<i} a_{ij} \sum_K f_k^J (g_i)(g_j^K)^{(1)} \\ &= 2\sum_{j<i} a_{ij} \sum_K f_k^J (g_j) \sum_{k<j} a_{jk} f^K \\ &= 2\sum_{j,k} a_{ij} a_{jk} \sum_K f_k^J f^K_{y=y_0}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

这里 $f(y)=(f^1(y^1,y^2,\cdots y^n),f^2(y^1,y^2,\cdots y^n),\cdots,f^n(y^1,y^2,\cdots y^n))^T$, $f_k^J=\dfrac{\partial f^J}{\partial y^K}$, $\sum\limits_K$ 表示对分量下标求和,即 $K=1,2,\cdots,n$, $\sum\limits_{j,k}$ 表示对矩阵元素下标 j,k 求和,且 $k<j<i$.

我们把 $q=3$ 的结果写出,

$$\begin{aligned} q = 3 \quad (g_i^J)_{h=0}^{(3)} = &\ 3\sum_{j,k,l} a_{ij} a_{jk} a_{jl} \sum_{KL} f^J_{K,L} f^K f^L_{y=y_0} \\ &+ 3.2\sum_{j,k,l} a_{ij} a_{jk} a_{kl} \sum_{K,L} f_K^J f_L^K f^L_{y=y_0}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

为了求得 y_1 的 Taylor 展开式,必须把(1.11)~(1.14)中的求和以 b_j 代替 a_{ij},并且把 j 的求和改为从 $1\sim S$.

我们再写出(1.8)中的各阶导数

$$(y^J)^{(1)} = f^J(y), \tag{1.15}$$

$$(y^J)^{(2)} = \sum_K f_K^J (y^K)^{(1)} = \sum_K f_K^J \cdot f^K, \tag{1.16}$$

$$(y^J)^{(3)} = \sum_{K,L} f_{KL}^J f^K f^L + \sum_{K,L} f_K^J f_L^K f^L. \tag{1.17}$$

对于近似值 y_1,我也把它看成 h 的函数 $y_1(h)$

$$y_1(h) = y_1(0) + hy_1'(0) + \frac{h^2}{2!}y_1''(0) + \frac{h^3}{3!}y_1'''(0) + \cdots \tag{1.18}$$

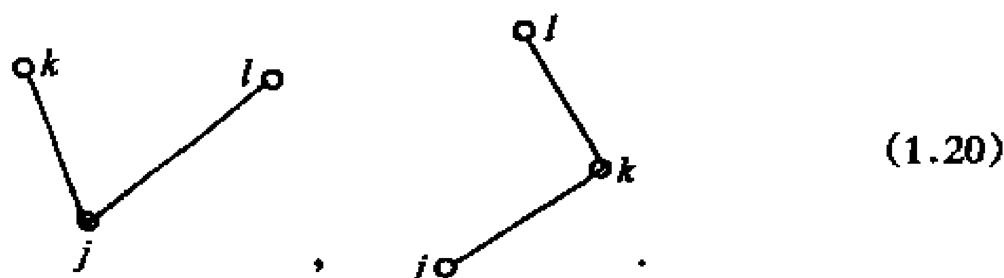
为了方法的阶为 $p=3$，必须使得(1.12)与(1.15)，(1.13)与(1.16)，(1.14)与(1.17)分别相等，便得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s} b_j &= 1, \\ 2\sum_{k,j} b_j a_{jk} &= 1, \\ 3\sum_{j,k,l} b_j a_{jk} a_{jl} &= 1, \\ 6\sum_{j,k,l} b_j a_{jk} a_{kl} &= 1. \end{aligned} \tag{1.19}$$

注意到 $C_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$，(1.19)变为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s} b_i &= 1, \\ \sum_{i=1}^{s} b_i C_i &= \frac{1}{2}, \\ \sum_{i=1}^{s} b_i C_i^2 &= \frac{1}{3}, \\ \sum_{j<i} b_i a_{ij} C_j &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

为了导出更高阶的 Runge-Kutta 方法，便会出现十分复杂的运算. Butcher 首先使用树的理论来简化这些运算，获得成功. 在上述对 g_i 的求导过程中，可发现一个十分有趣的事实，以 $g_i^{(3)}$ 为例，其中某项出现因子 $a_{jk}a_{jl}$ 时，必出现 $f_{KL}^J f^K f^L$；出现因子 $a_{jk}a_{kl}$ 时，必出现 $f_K^J \cdot f_L^K f^L$. 对于因子 $a_{jk}a_{jl}$ 与 $a_{jk}a_{kl}$ 分别用一棵树来表示，即



(1.20)

形如(1.20)的树称为**标号树**.它是从较高的顶点向较低的顶点的一个映射：

$$l \to j, k \to j; l \to k, k \to j.$$

定义 1.1 设 $A = \{j < k < l < m < p < \cdots\}$ 是一个指标的有序链，A_q 是包含前 q 个指标的子集.一个**有根标号树**是一个映射（父子映射）

$$t: \quad A_q - \{j\} \to A_q,$$

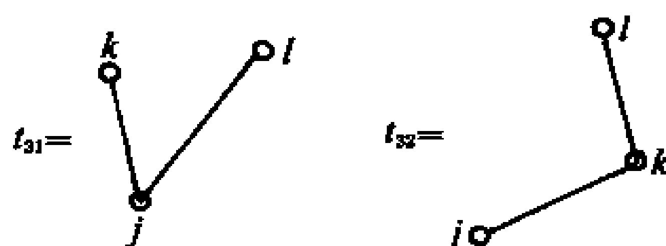
使得对任何 $z \in A_q - \{j\}$，$t(z) < z$，z 称为 $t(z)$ 的子，$t(z)$ 称为 z 的父.家族中的始祖称为树的根，所有 q 阶标号树的集合记为 LT_q；标号树的阶 q 等于树的顶点数，记为 $q = \rho(t)$.

定义 1.2 对于 LT_q 中的一个标号树 t，我们称

$$F^J(t)(y) = \sum_{K,L,\cdots} f^J_{K\cdots}(y) f^K_{\cdots}(y) f^L_{\cdots}(y)\cdots,$$

为对应的初等微分，这里求和是对 $q-1$ 个指标 $K, L, \cdots$ 进行的；每一项是 q 个 f 之积，其上标取遍树 t 的顶点，下标表示各顶点对应的子.

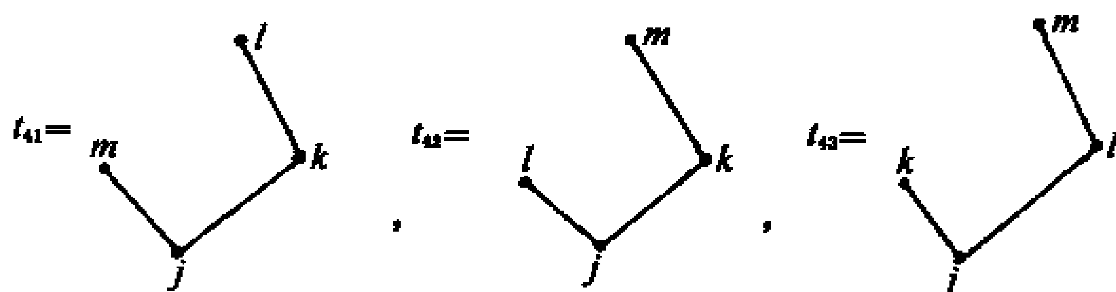
例如.



对应的初等微分便是

$$\sum_{K,L} f^J_{KL} f^K f^L, \quad \sum_{K,L} f^J_K f^K_L f^L.$$

又例如与标号树



对应的初等微分为

$$\sum_{K,M,L} f^J_{MK} f^M f^K_{L} f^L,$$

$$\sum_{K,L,M} f^J_{LK} f^L f^K_{M} f^M,$$

$$\sum_{K,L,M} f^J_{KL} f^K f^L_{M} f^M.$$

定义 1.3 两个标号树 t,u,如果 t 和 u 的阶相同为 q,且存在一个置换 σ,使得

$$\sigma: A_q \to A_q, \sigma(j) = j,$$

而对 $A_q - \{j\}$ 上的任一指标皆有

$$t\sigma = \sigma u,$$

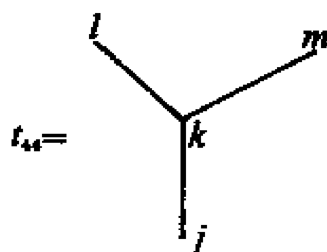
我们称 t 与 u 是等价的.

不难验证上面 t_{41}, t_{42}, t_{43} 三个标号树是等价的.

定义 1.4 所有 q 阶标号树的等价类称为 q 阶树,q 阶树的集合,记为 T_q,树 t 的顶点数记为 $\rho(t)$;倘 $t \in T_q$,记 $\alpha(t)$ 是 t 所属等价类中元素的个数,亦即 t 的单调排序的最大可能数.

例如,树 t_{41}, t_{42}, t_{43} 都属于同一等价类,此等价类中的元素个元恰好为 3,不可再有别的单调排序.

例如 对树 t_{44}



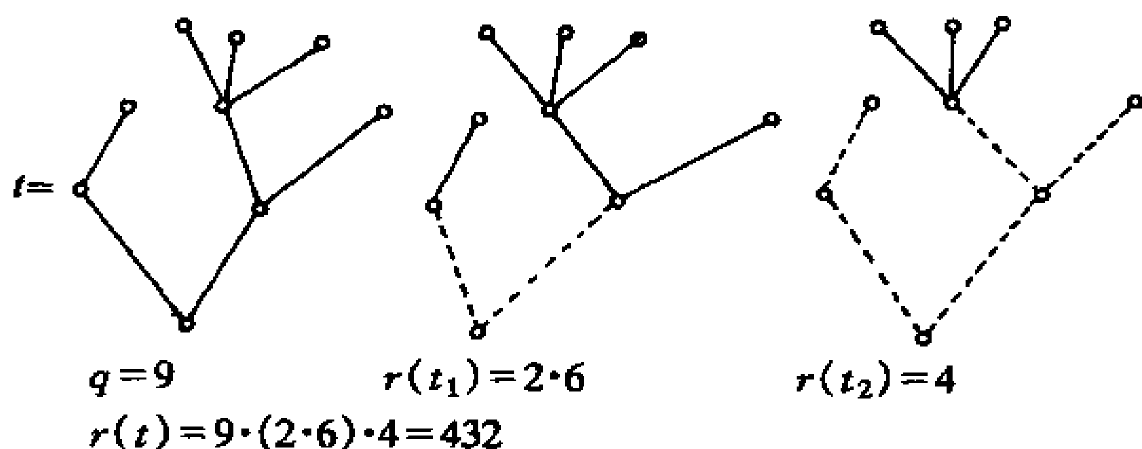
其 $\alpha(t_{44}) = 1$.

定义 1.5 设 $t \in T_q$,令

$$r(t) = q \cdot r(t_1) \cdot r(t_2) \cdots r(t_m),$$

其中 $r(t_1)$ 是 t 去掉根以后所有树的顶点数的乘积,$r(t_{j+1})$ 是 t_j 去掉根以后所有树的顶点数的乘积.

例如



$q=9$　　　　$r(t_1)=2\cdot 6$　　　　$r(t_2)=4$

$r(t)=9\cdot(2\cdot 6)\cdot 4=432$

我们把阶≤5 的标号树及相应的 $r(t)$，$\alpha(t)$及初等微分列于表 1.1，把阶≤10 的每一阶树的个数列于表 1.2，表 1.1 中的$\phi_j(t)$表示该树与相应的初等微分前面的系数，ϕ 表 0 阶树，τ 表示只有一个顶点的树，其阶 $q=1$.

表 1.1

q	t	图	$r(t)$	$\alpha(t)$	$F^J(t)(y)$	$\phi_j(t)$
0	ϕ	ϕ	1	1	y^J	
1	τ	$\cdot j$	1	1	f^J	1
2	t_{21}	j—k	2	1	$\sum_K f^J_K f^K$	$\sum_k a_{jk}$
3	t_{31}	l—j—k（j 为根）	3	1	$\sum_{K,L} f^J_{K,L} f^K f^L$	$\sum_{k,l} a_{jk} a_{jl}$
	t_{32}	j—k—l	6	1	$\sum_{K,L} f^J_K f^K_L f^L$	$\sum_{k,l} a_{jk} a_{kl}$

续表 1.1

q	t	图	$r(t)$	$\alpha(t)$	$F^J(t)y$	$\phi_j(t)$
4	t_{41}	m l k j	4	1	$\sum_{K,L,M} f^J_{KLM} f^K f^L f^M$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{jl} a_{jm}$
	t_{42}	l k m j	8	3	$\sum_{K,L,M} f^J_{KM} f^M f^K_L f^L$	$\sum_{k,l,m} a_{jm} a_{jk} a_{kl}$
	t_{43}	l m k j	12	1	$\sum_{K,L,M} f^J_K f^K_{ML} f^M f^L$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{kl} a_{km}$
	t_{44}	m l k j	24	1	$\sum_{K,L,M} f^J_K f^K_L f^L_M f^M$	$\sum_{k,l,m} a_{jk} a_{kl} a_{lm}$
5	t_{51}	m l k p j	5	1	$\sum_{K,L,M,P} f^J_{KLMP} f^K f^L f^M f^P$	$\sum_{k,l,m,p} a_{jk} a_{jl} a_{jm} a_{jp}$
	t_{52}	l k p m j	10	6	$\sum_{K,L,M,P} f^J_{KMP} f^K_L f^L f^M f^P$	$\sum_{k,l,m,p} a_{jk} a_{kl} a_{jm} a_{jp}$
	t_{53}	m l p k j	15	4	$\sum_{K,L,M,P} f^J_{KP} f^P f^K_{LM} f^L f^M$	$\sum_{k,l,m,p} a_{jk} a_{jp} a_{kl} a_{km}$
	t_{54}	m l p k j	30	4	$\sum_{K,L,M,P} f^J_{KP} f^P f^K_L f^L_M f^M$	$\sum_{k,l,m,p} a_{jk} a_{jp} a_{kl} a_{lm}$
	t_{55}	p l m k j	20	3	$\sum_{K,L,M,P} f^J_{KM} f^K_L f^L f^M_P f^P$	$\sum_{k,l,p,m} a_{jk} a_{jm} a_{kl} a_{mp}$

续表 1.1

q	t	图	$r(t)$	$\alpha(t)$	$F^J(t)y$	$\phi_j(t)$
5	t_{56}		20	1	$\sum_{K,L,M,P} f_K^J f_{LMP}^K f^L f^M f^P$	$\sum_{k,l,m,p} a_{jk}a_{kl}a_{km}a_{kp}$
	t_{57}		40	3	$\sum_{K,L,M,P} f_K^J f_{LP}^K f^P f_M^L f^M$	$\sum_{k,l,m,p} a_{jk}a_{kl}a_{kp}a_{lm}$
	t_{58}			60	$\sum_{K,L,M,P} f_K^J f_L^K f_{MP}^L f^M f^P$	$\sum_{k,l,m,p} a_{jk}a_{kl}a_{lm}a_{lp}$
	t_{59}		120	1	$\sum_{K,L,M,P} f_K^J f_L^K f_M^L f_P^M f^P$	$\sum_{k,l,m,p} a_{jk}a_{kl}a_{lm}a_{mp}$

表 1.2

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_q	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719

为了求得 Runge-Kutta 方法的阶条件，我们给出如下两个引理，其证明可参看 E. Hairer, S. P. Norsett, 及 G. Wanner 的书 "Solving Ordinary Differential Equations"

引理 1.1[9] 对于微分方程组

$$(y^J)' = f^J(y^1, y^2, \cdots, y^n), \quad J = 1 \sim n, \tag{1.21}$$

其理论解满足

$$(y_0^J)^{(q)} = \sum_{t \in LT_q} F(t)(y_0) = \sum_{t \in T_q} \alpha(t) F^J(t)(y_0). \quad (1.22)$$

引理 1.2[9] g_i^J, y_1^J 的导数满足

$$(g_i^J)_{h=0}^{(q)} = \sum_{t \in LT_q} r(t) \sum_j a_{ij} \phi_j(t) F^J(t)(y_0), \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}(y_1^J)_{h=0}^{(q)} &= \sum_{t \in LT_q} r(t) \sum_j b_j \phi_j(t) F^J(t)(y_0) \\ &= \sum_{t \in T_q} \alpha(t) r(t) \sum_j b_j \phi_j(t) F^J(t)(y_0). \quad (1.24)\end{aligned}$$

只要比较(1.22)式与(1.24)式便得

定理 1.3 S 级的 Runge-Kutta 方法(1.6)具有阶 p,当且仅当

$$\sum_{j=1}^{S} b_j \phi_j(t) = \frac{1}{r(t)}, \quad (1.25)$$

对一切阶 $q \leqslant p$ 的树 t 成立.

注意使用 $\sum_j a_{ij} = C_i$,由定理 1.3 及表 1.1 中的 $\phi_j(t)$ 之表达式,我们给出 $q \leqslant 5$ 时的定阶条件(1.25).

$$q = 1 \qquad \sum b_i = 1,$$

$$q = 2 \qquad \sum b_i c_i = \frac{1}{2},$$

$$q = 3 \qquad \begin{cases} \sum b_i c_i^2 = \dfrac{1}{3} \\ \sum b_i a_{ij} c_j = \dfrac{1}{6}, \end{cases}$$

$$q = 4 \qquad \begin{cases} \sum b_i a_{ij} c_i^2 = \dfrac{1}{4} \\ \sum b_i c_i a_{ij} c_j = \dfrac{1}{8} \\ \sum b_i a_{ij} c_j^2 = \dfrac{1}{12} \\ \sum b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \dfrac{1}{24} \end{cases},$$

$$
q = 5 \quad \begin{cases}
\sum b_i c_i^4 = \frac{1}{5} \\
\sum b_i c_i^2 a_{ij} c_j = \frac{1}{10} \\
\sum b_i c_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{15} \\
\sum b_i c_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{30} \\
\sum b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k = \frac{1}{20} \\
\sum b_i a_{ij} c_j^3 = \frac{1}{20} \\
\sum b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k = \frac{1}{40} \\
\sum b_i a_{ij} a_{jk} c_k^2 = \frac{1}{60} \\
\sum b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l = \frac{1}{120}
\end{cases}.
$$

如果我们希望方法的阶 $p=3$,那末必须解开头 4 个方程来确定 a_{ij}, b_i 及 c_i. 如果希望阶 $p=5$,那末必须解开头 17 个方程来确定 a_{ij}, b_i 及 c_i. 值得注意的是这些方程中并非每个都是独立的,有时增加一些附加条件,方程个数可以大大减少. 再要注意方程组的解并非全是唯一的.

下面的表 1.3 给出阶数与条件的个数之关系

表 1.3

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
条件数	1	2	4	8	17	37	85	200	486	1205

表 1.4 给出显式 Runge-Kutta 方法各种级数 S 可达的最高阶.

对于隐式Runge-Kutta方法的定阶条件的推导与显式时一

表 1.4

级数 S	最高可达阶 $\hat{p}$
1	1
2	2
3	3
4	4
5	4
6	5
7	6

样,只要把定阶条件中的求和指标全部改为 $1 \sim S$,如 $q=3$, $\sum_{i=1}^{S} c_i^2 b_i = \frac{1}{3}$; $\sum_{j<i} b_i a_{ij} c_j = 1/6$ 改为

$$\sum_{i,j=1}^{S} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}.$$

§2.2 显式 Runge-Kutta 方法的数值稳定性

注意到显式方法(1.2)或(1.6)总可写成如下一般形式:

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \tag{2.1}$$

其中 ϕ 是一个确定的函数.

为了分析显式 Runge-Kutta 方法的数值稳定性,可以让(2.1)去求解试验方程

$$y'(t) = \lambda y, \mathrm{Re}(\lambda) < 0,$$

可得

$$y_{n+1} = r(\bar{h}) y_n$$

其中 $\bar{h} = \lambda h$, $r(z)$ 是 z 的有理函数,其稳定集定义为

$$S = \{\bar{h} : | r(\bar{h}) | < 1\}.$$

如果

$$S \supseteq C^-,$$

我们称 Runge-Kutta 方法是 A 稳定的. 马上就会知道显式 Runge-Kutta 方法是不可能为 A 稳定的.

为了求出显式 Runge-Kutta 方法的稳定集 S,我们使用(1.6)之形式. 令

$$Y = (g_1, g_2, \cdots, g_s)^T,$$

$$e = (1, 1, \cdots, 1)^T,$$

则用(1.6)去求解试验方程 $y' = \lambda y$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$,使得

$$\begin{cases} Y = y_{n-1} e + \bar{h} A Y, \\ y_n = y_{n-1} + \bar{h} b^T Y. \end{cases} \tag{2.2}$$

由(2.2)式第一式

$$Y = (I - \bar{h}A)^{-1} e y_{n-1},$$

代入第二式

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + \bar{h} b^T (I - \bar{h}A)^{-1} e y_{n-1} \\ &= [1 + \bar{h} b^T (I - \bar{h}A)^{-1} e] y_{n-1}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} r(\bar{h}) &= [1 + \bar{h} b^T (I - \bar{h}A)^{-1} e] \\ &= [1 + \bar{h} b^T (I + \bar{h}A + \cdots + \bar{h}^{S-1} A^{S-1}) e], \end{aligned}$$

注意到定阶条件中，$k \leqslant p$ 时有

$$b^T A^{k-1} e = \frac{1}{k!},$$

代入 $r(\bar{h})$之表达式，便得

$$r(\bar{h}) = 1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2!} + \cdots + \frac{\bar{h}^p}{p!} + C_{p+1} \bar{h}^{p+1} + \cdots + C_S \bar{h}^S.$$

如果一个显式方法 $p = S$，那末

$$r(\bar{h}) = \sum_{i=0}^{S} \frac{\bar{h}^i}{i!},$$

使得$|r(\bar{h})| < 1$ 的$\bar{h}$的集合是左半平面上的一个有限区域，它不可能是 A 稳定的.

§2.3 隐式 Runge-Kutta 方法及其稳定性分析

我们只要在(1.6)中，命第一式中的求和指标改为 $j = 1 \sim S$，便构成隐式 Runge-Kutta 方法. 事实上此时关于 g_i 的非线性方程中，不能用递推方法求出其解.

我们考虑如下方法

$$\begin{cases} Y_i = y_n + h \sum_{j=1}^{S} a_{ij} f(\tau_j, Y_j), i = 1 \sim S, \\ y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{S} b_i f(\tau_i, Y_i), \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $\tau_j = t_n + C_j h$.

值得注意的是，在求得 y_{n+1} 时，必须先求解一个非线性方程组

$$Y_i = y_n + h\sum_{j=1}^{S} a_{ij} f(\tau_j, Y_j), \quad i = 1 \sim S. \qquad (3.2)$$

求出 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_S$ 后再代入(3.1)中第二式求出 y_{n+1}. 因此，对隐式 Runge-Kutta 方法(记为 IRK)来说，又多了一个问题，即(3.2)之解是否存在唯一，这个问题我们称为 IRK 或说矩阵 A 的适用性问题.

在讨论 IRK 的稳定性之前，先研究它的阶. 设 A, b, C 是用下法求得的，即如下三个限制条件，

(A) $AW = C$,

(B) $\sum_{j=1}^{S} b_j C_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1 \sim S$,

(C) $C_j, 1 \leqslant j \leqslant S$ 满足 $P_S(2c-1) = 0$,

其中 $C = (C_{ij}) = (C_i^j / j)$, $W = (w_{ij}) = (C_i^{j-1})$, P_S 是 S 次 Legendre 多项式. 令

(G) 对阶 $\leqslant 2s$ 的每棵树 t，阶条件

$$\sum_{j=1}^{S} b_j \phi_j(t) = \frac{1}{r(t)}.$$

成立.

Butcher 在 1964 年给出(A),(B),(C)及(G)之间的关系.

定理 3.1 [9] 下图所示的关系成立.

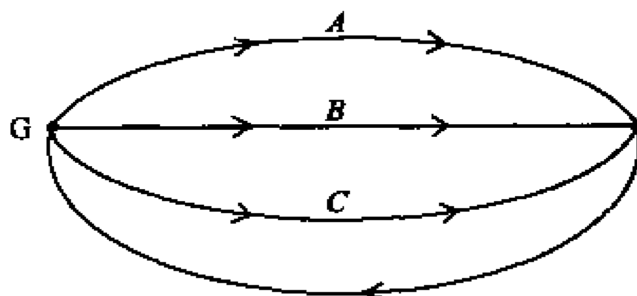


图 2.1

推论 3.2[9] 对任何自然数 S,可构造出 $p=2S$ 的 IRK.

下面我们讨论 IRK 的 A 稳定性. 为此用方法(3.1)去求解线性试验方程

$$y'(t) = \lambda y, \mathrm{Re}(\lambda) < 0. \tag{3.3}$$

可得

$$y_{n+1} = R(z) y_n,$$

其中

$$R(z) = 1 + z b^T (I - zA)^{-1} e.$$

定理 3.2[9] (Ehle, 1968; Butcher, 1977)存在 $p=2S$ 的 IRK,它是 A 稳定的.

对于隐式 Runge-Kutta 方法的稳定性,如果一个 IRK 是 A 稳定的,且

$$\lim_{\mathrm{Re}(z)\to\infty} |R(z)| = 0,$$

那末我们就称此 IRK 方法是 L 稳定的.

例. 梯形公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f_n + f_{n+1}],$$

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z}, \qquad z = h\lambda,$$

它是 A 稳定的,但不是 L 稳定的. 而隐式 Euler 公式

$$y_{n+1} = y_n + h f_{n+1},$$

$$R(z) = \frac{1}{1 - z}, \qquad z = h\lambda,$$

它是 L 稳定的.

针对试验方程

$$y'(t) = q(t) y(t), \quad \mathrm{Re}(q(t)) \leqslant 0, \tag{3.4}$$

将导出所谓 AN 稳定性的概念.

用(3.1)去求解(3.4),得

$$\begin{cases} Y_i = y_n + h\sum_{j=1}^{S} a_{ij} f(\tau_j, Y_j), i = 1 \sim S, \\ y_{n+1} = y_n + h\sum b_j f(\tau_j, Y_j), \end{cases} \tag{3.5}$$

成为

$$\begin{cases} Y_i = y_n + h\sum_{j=1}^{S} a_{ij} q(t_n + C_j h) Y_j, i = 1 \sim S, \\ y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{S} b_j q(t_n + C_j h) Y_j. \end{cases} \tag{3.6}$$

令

$$Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_s)^T,$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \xi_1 & & & 0 \\ & \xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \xi_s \end{bmatrix},$$

其中，$\xi_i = hq(t_n + c_i h)$，则(3.6)成为

$$\begin{cases} Y = ey_n + A\zeta Y, \\ y_{n+1} = y_n + b^T\zeta Y, \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + b^T\zeta(I - A\zeta)^{-1} e y_n \\ &\equiv K(\zeta) y_n, \end{aligned}$$

其中 $K(\zeta) = 1 + b^T\zeta(I - A\zeta)^{-1}e$，是关于 $\xi_1, \xi_2 \cdots, \xi_s$ 之有理函数，(特征函数).

定义 3.1 如果对一切 ξ_j，$\mathrm{Re}(\xi_j) \leqslant 0$，特征函数 $K(\zeta)$ 满足

$$|K(\zeta)| \leqslant 1,$$

我们就称方法(3.1)是 ***AN* 稳定的**.

为了后面讨论的需要，我们先给出如下引理：

引理 3.3 假设

$$\det[I - A\zeta] \neq 0,$$

$$u = (I - A\zeta)^{-1} e,$$

则

$$|K(\zeta)|^2-1=2\sum_{i=1}^{S}b_i\mathrm{Re}(\xi_i)|u_i|^2-\sum_{ij=1}^{S}m_{ij}\bar{\xi}_i\xi_j\bar{u}_iu_j,$$

其中

$$m_{ij}=b_ia_{ij}+b_ja_{ji}-b_ib_j,i,j=1\sim S.$$

证明 由

$$u=(I-A\zeta)^{-1}e,$$

故

$$u_i=1+\sum_{j=1}^{S}a_{ij}\xi_ju_j,$$

从而

$$\begin{cases}b_i=b_iu_i-\sum_{j=1}^{S}a_{ij}\xi_ju_jb_i, & i=1,2,\cdots,S,\\ b_j=b_j\bar{u}_j-\sum_{i=1}^{S}b_ja_{ji}\bar{\xi}_i\bar{u}_i, & j=1,2,\cdots,S.\end{cases} \tag{3.7}$$

从 $K(\zeta)$之定义知

$$K(\zeta)=1+\sum_{j=1}^{S}b_j\xi_ju_j,$$

$$\overline{K(\zeta)}=1+\sum_{i=1}^{S}b_i\bar{\xi}_i\bar{u}_i.$$

相乘

$$|K(\zeta)|^2-1=\sum_{i=1}^{S}b_i\bar{\xi}_i\bar{u}_i+\sum_{j=1}^{S}b_ju_j\xi_j+\sum_{i,j=1}^{S}b_ib_j\bar{\xi}_j\bar{u}_j\xi_iu_i.$$

将(3.7)中之 b_i,b_j 代入上式右端便得证.

下面给出 IRK 的 B 稳定及 BN 稳定的概念.

定义 3.2 对于自治系统

$$y'=f(y),y,f(y)\in R^N, \tag{3.8}$$

映射 f 满足如下单调性条件:

$$\langle f(y)-f(z), y-z\rangle \leqslant 0, \qquad \forall y, z \in R^N.$$

如果 IRK 的任意两组解(3.8 之数值解)$\{y_n\}$和$\{z_n\}$满足

$$\| y_{n+1}-z_{n+1} \| \leqslant \| y_n - z_n \|, \quad n \geqslant 0,$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$是 R^N 中的内积，$\| y \| = \langle y, y\rangle^{1/2}$. 此时就称此 IRK 是 B 稳定的(Butcher, 1979).

定义 3.3 对于非自治系统

$$y'(t) = f(t, y), \quad y, f(t, y) \in R^N, \tag{3.9}$$

映射 f 满足单调性条件

$$\langle f(t, y)-f(t, z), y-z\rangle \leqslant 0, \quad \forall y, z \in R^N, t \in R.$$

如果(3.9)的任意两组数值解$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足

$$\| y_{n+1}-z_{n+1} \| \leqslant \| y_n - z_n \|, \tag{3.10}$$

我们就称此 IRK 方法是 BN 稳定的.

定理 3.4 令 $m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$，为矩阵 $M = BA + A^T B - bb^T$ 之元素，$B = \mathrm{diag}\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$. 如果 $M \geqslant 0$ 及 $B \geqslant 0$，则(3.1)是 BN 稳定的. 这里 $B \geqslant 0$，$M \geqslant 0$ 分别表示它们是非负定的.

证明 设$\{y_n\}$及$\{z_n\}$分别由下面两式定义：

$$\begin{cases} Y_i = y_n + h\sum_{j=1}^{S} a_{ij} f(\tau_j, Y_j), \quad i = 1 \sim S, \\ y_{n+1} = y_n + h\sum_{j=1}^{S} b_j f(\tau_j, Y_j), \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} Z_i = z_n + h\sum_{j=1}^{S} a_{ij} f(\tau_j, Z_j), \quad i = 1 \sim S, \\ z_{n+1} = z_n + h\sum_{j=1}^{S} b_j f(\tau_j, Z_j). \end{cases} \tag{3.12}$$

令

$$V_0 = y_n - z_n,$$
$$V_j = Y_j - Z_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant S,$$
$$W_j = hf(\tau_j, Y_j) - hf(\tau_j, Z_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant S,$$

$$V = y_{n+1} - z_{n+1}.$$

则

$$V_i = V_0 + \sum_{j=1}^{S} a_{ij} W_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant S, \tag{3.13}$$

$$V = V_0 + \sum_{j=1}^{S} b_j W_j. \tag{3.14}$$

由(3.14)

$$\| V \|^2 = \| V_0 \|^2 + 2\sum_{i=1}^{S} b_i \langle V_0, W_i \rangle + \sum_{ij=1}^{S} b_i b_j \langle W_i, W_j \rangle. \tag{3.15}$$

由(3.13)两边与 W_i 作内积,得

$$\langle V_0, W_i \rangle = \langle V_i, W_i \rangle - \sum_{j=1}^{S} a_{ij} \langle W_i, W_j \rangle.$$

代入(3.15)得

$$\begin{aligned} \| V \|^2 = & \| V_0 \|^2 + 2\sum_{i=1}^{S} b_i \{ \langle V_i, W_i \rangle - \sum_{j=1}^{S} a_{ij} \langle W_i, W_j \rangle \} \\ & + \sum_{i,j=1}^{S} b_i b_j \langle W_i, W_j \rangle \\ = & \| V_0 \|^2 + 2\sum_{i=1}^{S} b_i \langle V_i, W_i \rangle - \sum_{i,j=1}^{S} m_{ij} \langle W_i, W_j \rangle. \end{aligned}$$

因为

$$\langle W_j, V_j \rangle \leqslant 0, b_j \geqslant 0, 1 \leqslant j \leqslant S, \sum_{i,j=1}^{S} m_{i,j} \langle W_i, W_j \rangle \geqslant 0,$$

推出

$$\| V \|^2 \leqslant \| V_0 \|^2,$$

于是 IRK 是 BN 稳定的.

定义 3.4 一个 IRK,若满足 $B \geqslant 0$ 及 $M \geqslant 0$,则说此隐式 Runge-Kutta 方法是**代数稳定的**(algebraically stable).

容易看出 BN 稳定$\Rightarrow$$AN$ 稳定.事实上,令

$$y_{n+1} = K(\zeta) y_n,$$

$$z_{n+1} = K(\zeta) z_n,$$

$$\| y_{n+1} - z_{n+1} \| = | K(\zeta) | \cdot \| y_n - z_n \|.$$

因为

$$\| y_{n+1} - Z_{n+1} \| \leqslant \| y_n - Z_n \|,$$

那末

$$| K(\zeta) | \leqslant 1.$$

从而,对 IRK 来说,

代数稳定性 $\Rightarrow BN$ 稳定性 $\Rightarrow AN$ 稳定性.

进一步尚有如下定理.

定理3.5 倘使一个 IRK 是 AN 稳定的,且它是非合流的,即 $C_i \neq C_j, i \neq j$,则它必是代数稳定的.

证明 先证 $b_i \geqslant 0$. 设某 $b_i < 0$,取 $\xi_i = -\varepsilon, \varepsilon > 0$,且当 $j \neq i$ 时 $\xi_j = 0$. 因为 $u = (I - A\xi)^{-1} e$,其中

$$\zeta = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & -\varepsilon & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

则

$$u_k = \frac{1 + \varepsilon(a_{ii} - a_{ik})}{1 + \varepsilon a_{ii}}, \qquad k \neq i,$$

$$u_i = \frac{1}{1 + \varepsilon a_{ii}},$$

显然,当 $\varepsilon \to 0$ 时,$u_i \to 1$. 而

$$| K(\zeta) |^2 - 1 = -2 b_i \varepsilon u_i^2 - (2 b_i a_{ii} - b_i^2) \varepsilon^2 u_i^2,$$

当 ε 充分小时(注意到 $b_i < 0$)

$$| K(\zeta) | - 1 > 0,$$

这与 IRK 是 AN 稳定的发生矛盾.

再证 $M \geqslant 0$. 反之设存在一组数$(r_1, r_2, \cdots, r_S)$使得

$$\sum_{ij=1}^{S} m_{ij} r_i r_j < 0.$$

取 $\xi_i = \varepsilon r_i \sqrt{-1}$, $i = 1,2,\cdots,S$,则

$$u_i = 1 + \varphi(\varepsilon)$$

且

$$\varphi(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

进而

$$\begin{aligned} |K(\zeta)|^2 - 1 &= -\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{S} m_{ij} r_i r_j |1 + \varphi(\varepsilon)|^2 \\ &= -\varepsilon^2 \sum_{ij=1}^{S} m_{ij} r_i r_j + \varepsilon^2 O(\varepsilon). \end{aligned}$$

当 ε 充分小时导致

$$|K(\zeta)|^2 - 1 > 0,$$

再次与 *AN* 稳定性发生矛盾,定理 3.5 证毕.

从定理 3.4,定义 3.4,及定理 3.5 可得

定理 3.6 对于非合流隐式 Runge-Kutta 方法,下面的命题是等价的:

(a)IRK 是代数稳定的,

(b)IRK 是 *BN* 稳定的,

(c)IRK 是 *AN* 稳定的.

§2.4 多步隐式 Runge-Kutta 方法及其稳定性分析

考虑如下二步 Runge-Kutta 方法

$$\begin{aligned} Y_i &= y_n + h \sum_{j=1}^{S} a_{ij} f(\tau_j, Y_j), \quad i = 1,2,\cdots,S, \\ \widetilde{Y}_i &= y_{n-1} + h \sum_{j=1}^{S} a_{ij} f(\widetilde{\tau}_j, \widetilde{Y}_j), \quad i = 1,2,\cdots,S, \quad (4.1) \\ y_{n+1} &= (1-\theta) y_n + h \sum_{j=1}^{S} b_j f(\tau_j, Y_j) + \theta y_{n-1} \end{aligned}$$

$$+ h\sum_{j=1}^{S} \tilde{b}_j f(\tilde{\tau}_j, \tilde{Y}_j).$$

其中 $\tau_j = t_n + C_j h$，$\tilde{\tau}_j = t_{n-1} + C_j h$，$y_n$ 是真解 $y(t_n)$ 的逼近值，$0 \leqslant \theta \leqslant 1$，$b_j$，$\tilde{b}_j$，$a_{ij}$ 是方法的系数. 为了清楚起见，我们也能用表格的形式表示方法(4.1).

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline \theta & \begin{array}{c} b^T \\ \tilde{b}^T \end{array} \end{array} \quad 即 \quad \begin{array}{c|cccc} C_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1S} \\ C_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2S} \\ \vdots & \vdots & & & \\ C_S & a_{S1} & a_{S2} & \cdots & a_{SS} \\ \hline \theta & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \\ & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \cdots & b_s \end{array},$$

其中

$$C_i = \sum_{j=1}^{S} a_{ij}.$$

显然，在求解 y_{n+1} 仅需求解(4.1)中第一个非线性方程组，而 $\tilde{Y}_i(i=1,2,\cdots,S)$ 可以取前一步计算时的量，因此二步 Runge-Kutta 方法与同样级的单步 Runge-Kutta 方法相比没有增加额外的工作量.

类似于前面的 B 稳定、BN 稳定性分析，我们也认为右端函数 f 满足单调性条件：

$$\langle f(t,y) - f(t,z), y - z \rangle \leqslant 0, \quad \forall t \in R, \forall y, z \in R^N. \tag{4.2}$$

定义 4.1 设方程

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), & t \in [t_0, b], \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

之右端函数 f 满足单调性条件(4.2)，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 为方法(4.1)的任意两组解，若

$$\| y_n - z_n \| \leqslant r_1 n^{q_1} N^{p_1} \| y_0 + z_0 \| + r_2 n^{q_2} N^{p_2} \| y_1 - z_1 \|,$$

其中 $r_1, p_1, q_1, r_2, p_2, q_2$ 是与 n 及 N 无关的非负常数，我们就说

方法(4.1)是弱广义可压缩的. 而当 $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$ 时称为广义可压缩的.

定理 4.1 设方程(4.3)的右端函数 f 满足(4.2),方法(4.1)的系数满足条件

$$\begin{cases} 1. \quad B \geqslant 0, \widetilde{B} \geqslant 0, \\ 2. \quad (1-\theta)[BA + A^T B] - bb^T \geqslant 0, \\ 3. \quad \theta[\widetilde{B}A + A^T\widetilde{B}] - \widetilde{b}\,\widetilde{b}^T \geqslant 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $B = \mathrm{diag}\{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$, $\widetilde{B} = \mathrm{diag}\{\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \cdots, \widetilde{b}_s\}$. 于是方法(4.1)的任意两组解 $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 必定满足

$$\| y_{n+1} - z_{n+1} \| \leqslant f(n) \| y_0 - z_0 \| + g(n) \| y_1 - z_1 \|, \forall n \geqslant 0, \tag{4.5}$$

其中 $f(n), g(n) \geqslant 0$ 及 $f(n) + g(n) = 1$ 对任意 $n \geqslant 0$ 成立.

证明 因为 $\{z_n\}$ 亦为(4.1)之解,故

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1-\theta)z_n + \sum\limits_{j=1}^{S} b_j f(\tau_j, Z_j) + \theta z_{n-1} + \sum\limits_{j=1}^{S} \widetilde{b}_j f(\widetilde{\tau}_j, \widetilde{Z}_j), \\ Z_j = z_n + h\sum\limits_{j=1}^{S} a_{ij} f(\tau_j, Z_j), \quad i = 1 \sim S, \\ \widetilde{Z}_j = z_{n-1} + h\sum a_{ij} f(\tau_j, \widetilde{Z}_j), \quad i = 1 \sim S, \end{cases} \tag{4.6}$$

我们令

$$\begin{cases} V_\theta = y_n - z_n, \\ \widetilde{V}_\theta = y_{n-1} - z_{n-1}, \\ W_j = hf(\tau_j, Y_j) - hf(\tau_j, Z_j), \quad j = 1, 2, \cdots, S, \\ \widetilde{W}_j = hf(\widetilde{\tau}_j, \widetilde{Y}_j) - hf(\widetilde{\tau}_j, \widetilde{Z}_j), \quad j = 1, 2, \cdots, S, \\ V_j = Y_j - Z_j, \quad j = 1, 2, \cdots, S, \\ \widetilde{V}_j = \widetilde{Y}_j - \widetilde{Z}_j, \quad j = 1, 2, \cdots, S, \\ V = y_{n+1} - z_{n+1}. \end{cases} \tag{4.7}$$

由定义知

$$V = (1-\theta)V_\theta + \theta\widetilde{V}_\theta + \sum_{j=1}^{S} b_j W_j + \sum_{j=1}^{S} \widetilde{b}_j \widetilde{W}_j$$

$$= U_1 + U_2,$$

其中

$$U_1 = (1-\theta)V_\theta + \sum_{j=1}^{S} b_j W_j, \quad U_2 = \theta \widetilde{V}_\theta + \sum_{j=1}^{S} \widetilde{b}_j \widetilde{W}_j.$$

利用三角形不等式,我们有

$$\| V \| \leqslant \| U_1 \| + \| U_2 \|. \tag{4.8}$$

类似于定理 3.4 的证明,也可证明

$$\| U_1 \| \leqslant (1-\theta) \| V_\theta \|, \tag{4.9}$$

$$\| U_2 \| \leqslant \theta \| \widetilde{V}_\theta \|. \tag{4.10}$$

把(4.9)~(4.10)代入(4.8)得

$$\| V \| \leqslant (1-\theta) \| V_\theta \| + \theta \| \widetilde{V}_\theta \|,$$

即

$$\| y_{n+1} - z_{n+1} \| \leqslant (1-\theta) \| y_n - z_n \| + \theta \| y_{n-1} - z_{n-1} \|. \tag{4.11}$$

为了得到表达式(4.5),考虑差分方程

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\theta)u_n + \theta u_{n-1}, \\ u_0 = \| y_0 - z_0 \|, \quad u_1 = \| y_1 - z_1 \|. \end{cases} \tag{4.12}$$

不难验证

$$\| y_n - z_n \| \leqslant u_n, \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{4.13}$$

(4.12)的通解为

$$u_n = C_1 + C_2(-\theta)^n,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数,但用(4.12)中的初值,可以确定 C_1 及 C_2,它们是

$$C_1 = \frac{\theta \| y_0 - z_0 \| + \| y_1 - z_1 \|}{1+\theta},$$

$$C_2 = \frac{\| y_0 - z_0 \| - \| y_1 - z_1 \|}{1+\theta}.$$

把它们代入(4.13),得

$$\| y_n - z_n \| \leqslant f(n) \| y_0 - z_0 \| + g(n) \| y_1 - z_1 \|,$$

其中

$$f(n) = [\theta + (-\theta)^n]/(1+\theta),$$
$$g(n) = [1 - (-\theta)^n]/(1+\theta).$$

不难看出，$f(n) \geqslant 0, g(n) \geqslant 0$ 及 $f(n) + g(n) = 1$. 定理 4.1 证毕.

对于线性试验方程

$$y' = q(t)y, \mathrm{Re}(q(t)) \leqslant 0, y \in R, \qquad (4.14)$$

令

$$\xi_i = q(t_n + C_i h),$$
$$\widetilde{\xi}_i = q(t_{n-1} + C_i h).$$

用方法(4.1)来解(4.14)，得

$$Y_i = y_n + \sum_{j=1}^{S} a_{ij}\xi_j Y_j, \quad i = 1 \sim S,$$

$$\widetilde{Y}_i = y_{n-1} + \sum_{j=1}^{S} a_{ij}\widetilde{\xi}_j \widetilde{Y}_j, \quad i = 1 \sim S,$$

$$y_{n+1} = (1-\theta)y_n + h\sum_{j=1}^{S} b_j \xi_j Y_j + \theta y_{n-1} + h\sum_{j=1}^{S} \bar{b}_j \widetilde{\xi}_j \widetilde{Y}_j.$$

令

$$\zeta = \begin{bmatrix} \xi_1 & & & 0 \\ & \xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \xi_s \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\zeta} = \begin{bmatrix} \widetilde{\xi}_1 & & & 0 \\ & \widetilde{\xi}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \widetilde{\xi}_s \end{bmatrix}$$

$$Y = (Y_1 Y_2 \cdots Y_s)^T, \quad \widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_1 \widetilde{Y}_2 \cdots \widetilde{Y}_s)^T.$$

那末

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= [1 - \theta + b^T\zeta(I - A\zeta)^{-1}e]y_n \\ &\quad + [\theta + \bar{b}^T\widetilde{\zeta}(I - A\widetilde{\zeta})^{-1}e]y_{n-1} \\ &= K(\zeta)y_n + \widetilde{K}(\widetilde{\zeta})y_{n-1}. \end{aligned}$$

如果当 $\mathrm{Re}(q(t)) \leqslant 0$，有

$$|K(\zeta)| \leqslant 1 - \theta, \text{及}$$

$$|\widetilde{K}(\widetilde{\zeta})|\leqslant\theta, \tag{4.15}$$

则

$$|y_{n+1}|\leqslant(1-\theta)|y_n|+\theta|y_{n-1}|.$$

利用上一段类似的证明技巧可得

定理 4.2 如果$\{y_n\}$是试验方程(4.14)用方法(4.1)求得的一组解，$K(\zeta)$及 $\widetilde{K}(\widetilde{\zeta})$满足(4.15)，那么

$$|y_n|\leqslant f(n)|y_0|+g(n)|y_1|,$$

其中 $f(n),g(n)\geqslant0,f(n)+g(n)=1$ 对任意的 $n\geqslant0$ 成立.

上面的定理 4.1 及定理 4.2 的结论，不难推广到 K 步隐式 Runge-Kutta 的情况，详细情况可参阅文献[65].

§2.5 关于 IRK 的适用性

用 IRK 去求解非线性初值问题

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y), & y,f(t,y)\in R^N \\ y(t_0)=y_0, \end{cases}$$

时，需要求解非线性方程组(见§2.3(3.2)式，那里用 Y_i 表示 y_i)

$$y_i=u_n+h\sum_{j=1}^{S}a_{ij}f(\tau_j,y_j),\quad i=1\sim S. \tag{5.1}$$

如果我们用 $f_j(y_j)$代替 $f(\tau_j,y_j)$，那末(5.1)便变成

$$y_i=u_n+h\sum_{j=1}^{S}a_{ij}f_j(y_j),\quad i=1\sim S. \tag{5.2}$$

方程(5.2)之可解性与下列方程一致(见文献[18])：

$$y_i=h\sum_{j=1}^{S}a_{ij}f_j(y_j). \tag{5.3}$$

这节，我们将考虑更一般的问题，即方程(见文献[19])

$$y_i=h\sum_{j=1}^{S}a_{ij}f_j(y_j)+h^2\sum_{j=1}^{S}b_{ij}g_j(y_j),\quad i=1\sim S \tag{5.4}$$

的可解性，令

$$A=(a_{ij})\in R^{S\times S},C=(c_{ij})\in R^{N\times N}.$$

A 和 C 的 Kronnecker 乘积规定为

$$A \otimes C = \begin{bmatrix} a_{11}C & a_{12}C & \cdots & a_{1s}C \\ a_{21}C & a_{22}C & \cdots & a_{2s}C \\ a_{s1}C & a_{s2}C & \cdots & a_{ss}C \end{bmatrix},$$

这里

$$a_{ij}C = \begin{bmatrix} a_{ij}C_{11} & a_{ij}C_{12} & \cdots & a_{ij}C_{1N} \\ a_{ij}C_{21} & a_{ij}C_{22} & \cdots & a_{ij}C_{2N} \\ a_{ij}C_{N1} & a_{ij}C_{N2} & \cdots & a_{ij}C_{NN} \end{bmatrix}.$$

引理 5.1[27] 令 L 和 D 是 m 阶方阵，I_N 是 N 阶单位阵，于是 $(LD)\otimes I_N=(L\otimes I_N)(D\otimes I_N)$. 进而倘使 $DL+L^TD$ 及 D 是正定阵，则 $(DL+L^TD)\otimes I_N$ 及 $D\otimes I_N$ 亦是正定的.

令

$$L = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I_S \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{L} = L \otimes I_N = \begin{bmatrix} A \otimes I_N & B \otimes I_N \\ 0 & I_S \otimes I_N \end{bmatrix},$$

此处

$$A = (a_{ij})_{S\times S}, B = (b_{ij})_{S\times S}.$$

记

$$y = (y_1^T y_2^T \cdots y_s^T)^T,$$

$$f(y) = (f_1(y_1)^T f_2(y_2)^T \cdots f_s(y_s)^T)^T,$$

$$g(y) = (g_1(y_1)^T g_2(y_2)^T \cdots g_s(y_s)^T)^T,$$

$$Y_g = \begin{bmatrix} y \\ h^2 g(y) \end{bmatrix},$$

$$F(Y) = \begin{bmatrix} hf(y) \\ h^2 g(y) \end{bmatrix},$$

$$y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \cdots, y_{iN})^T, \quad i = 1,2,\cdots,S,$$

$$g_i(y_i) = (g_{i1}(y_i), g_{i2}(y_i), \cdots, g_{iN}(y_i))^T, \quad i = 1,2,\cdots,S,$$

$$f_i(y_i) = (f_{i1}(y_i), f_{i2}(y_i), \cdots, f_{iN}(y_i))^T \quad i = 1,2,\cdots,S.$$

于是(5.4)能写为

$$Y_g = \mathscr{L}F(Y) \tag{5.5}$$

或

$$\begin{pmatrix} y \\ h^2 g(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \otimes I_N & B \otimes I_N \\ 0 & I_S \otimes I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} hf(y) \\ h^2 g(y) \end{pmatrix}.$$

在空间 R^{2NS} 中定义内积

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_{i=1}^{S} d_i \langle x_i, y_i \rangle + \sum_{i=1}^{S} d_i \langle x_{S+i}, y_{S+i} \rangle \\ &= X \mathscr{D} Y. \end{aligned} \tag{5.6}$$

这里

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_{2S})^T,$$

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_{2S})^T,$$

$$\mathscr{D} = \begin{pmatrix} D \otimes I_N & 0 \\ 0 & D \otimes I_N \end{pmatrix},$$

$$D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_S\}, \quad d_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant S.$$

对应于(5.6)的范数定义为

$$\| X \| = [X, X]^{1/2}. \tag{5.7}$$

贯穿于本节,我们假定

$$\langle f_j(u) - f_j(v), u - v \rangle \leqslant 0, \quad \forall u, v \in R^N, j = 1 \sim S, \tag{5.8}$$

$$\| g_j(u) - g_j(v) \| \leqslant \sigma \| u - v, \| \quad \forall u, v \in R^N, \sigma > 0, j = 1 \sim S. \tag{5.9}$$

对于条件(5.8),我们可作如下解释,倘(5.8)成立,那末初值问题(1.1)在不同初值下的任意两个解 $U(t)$ 及 $\widetilde{U}(t)$ 必满足 $\| U(t) - \widetilde{U}(t) \| \leqslant \| U(t-h) - \widetilde{U}(t-h) \|$.

令 $w \in R^{2NS}, w \neq 0$, 于是

$$[\mathscr{L}w, w] = w^T \mathscr{L}^T \mathscr{D} w,$$

$$[w, \mathscr{L}w] = w^T \mathscr{D} \mathscr{L} w,$$

因此

$$[\mathscr{L}w, w] = \frac{1}{2} w^T \{\mathscr{D}\mathscr{L} + \mathscr{L}^T\mathscr{D}\} w.$$

如 $\widetilde{D}L + L^T\widetilde{D}$ 是正定的，按引理 5.1 知 $\mathscr{D}\mathscr{L} + \mathscr{L}^T\mathscr{D}$ 亦是正定的，这里

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

假定 $\widetilde{D}L + L^T\widetilde{D}$ 是正定的，那末

$$[\mathscr{L}w, w] > 0, \quad \forall w \in R^{2NS}, w \neq 0.$$

因此，$\mathscr{L}^{-1}$存在且$[\mathscr{L}^{-1}w, w]>0$ 对一切 $w \in R^{2NS}, w \neq 0$ 成立，从而

$$\min_{\|w\|=1} [\mathscr{L}^{-1}w, w] = \beta > 0. \tag{5.10}$$

定理 5.1 令 $D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_s\}, d_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant s, f_j$ 与 g_j 满足条件(5.8)～(5.9)，$1 \leqslant j \leqslant s$. 假设 $\widetilde{D}L + L^T\widetilde{D}$ 是正定的，那末当

$$0 < h < \sqrt{\frac{2\beta}{\sigma}} \tag{5.11}$$

时方程组(5.4)有唯一解.

证明 存在性的证明. 令

$$G(X) = \mathscr{L}^{-1}X - F(X), \quad X \in R^{2NS},$$

于是

$$G(X) - G(0) = \mathscr{L}^{-1}X - F(X) + F(0),$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, v_1 = (x_1, x_2, \cdots x_s)^T, v_2 = (x_{s+1}, x_{s+2}, x_{2s})^T.$$

从(5.10)及(5.11)知

$$\begin{aligned}[G(X) - G(0), X] = {} & [\mathscr{L}^{-1}X, X] - [F(X) - F(0), X] \\ & \geqslant \beta \|X\|^2 - h \sum_{j=1}^{S} d_j \langle f_j(x_j) - f_j(0), x_j - 0 \rangle \\ & - h^2 \sum_{j=1}^{S} d_j \langle g_j(x_j) - g_j(0), x_{s+j} - 0 \rangle\end{aligned}$$

$$\geqslant \beta \| X \|^2 - h^2 \sum_{j=1}^{S} d_j \| g_j(x_j) - g_j(0) \| \cdot \| x_{s+j} - 0 \|$$

$$\geqslant \beta \| X \|^2 - h^2 \sum_{j=1}^{S} d_j \frac{\sigma}{2} (\| x_j \|^2 + \| x_{s+j} \|^2)$$

$$= (\beta - h^2 \sigma/2) \sum_{j=1}^{S} d_j \| x_j \|^2 + (\beta - h^2 \sigma/2) \sum_{j=1}^{S} d_j \| x_{s+j} \|^2$$

$$= \beta_1 \| X \|^2, \quad (\beta_1 = \beta - h^2 \sigma/2).$$

因此

$$[G(X) - G(0), X - 0] \geqslant \beta_1 \| X \|^2.$$

从 Schwartz 不等式知

$$[G(0), X] \geqslant - \| G(0) \| \cdot \| X \|,$$

故

$$[G(X), X] \geqslant \beta_1 \| X \|^2 - \| G(0) \| \cdot \| X \| = \| X \| (\beta_1 \| X \| - \| G(0) \| .$$

于是对 $\forall X \in R^{2NS}$, $\| X \| \geqslant \| G(0) \| / \beta_1$,便有

$$[G(X), X] \geqslant 0. \tag{5.12}$$

令 $0 \neq X \in R^{2NS}$, $\lambda > 1$. 定义

$$H(X) = X - G(X),$$

那末

$$[\lambda X - H(X), X] = [(\lambda - 1)X + G(X), X] = [(\lambda - 1)X, X] + [G(X), X] \geqslant [(\lambda - 1)X, X] > 0.$$

因此,对一切 $\| X \| \geqslant \| G(0) \| / \beta_1$, $H(X) \neq \lambda X$. 按 Schauder 不动点定理[62], $H(X)$有不动点

$$X^* = \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{bmatrix}, \quad \| X^* \| < \| G(0) \| / \beta_1,$$

使得

$$H(X^*) = X^* = X^* - G(X^*),$$

即

$$G(X^*) = 0,$$

或

$$X^* = \mathscr{L}F(X^*),$$

或

$$v_1^* = hA \otimes I_N f(v_1^*) + h^2 B \otimes I_N g(v_1^*),$$

$$v_2^* = h^2 g(v_1^*),$$

唯一性,设 X 及 $\widetilde{X}$ 皆是(5.5)之解

$$0 = X - \mathscr{L}F(X) = \widetilde{X} - \mathscr{L}F(\widetilde{X}),$$

则

$$\begin{aligned}
\beta \| X - \widetilde{X} \|^2 &= \beta \sum_{j=1}^{S} d_j \| x_j - \widetilde{x}_j \|^2 + \beta \sum_{j=1}^{S} d_j \| x_{s+j} - \widetilde{x}_{s+j} \|^2 \\
&\leqslant [\mathscr{L}^{-1}(X - \widetilde{X}), X - \widetilde{X}] \\
&= [F(X) - F(\widetilde{X}), X - \widetilde{X}] \\
&= h \sum_{j=1}^{S} d_j \langle f_j(x_j) - f_j(\widetilde{x}_j), x_j - \widetilde{x}_j \rangle \\
&\quad + h^2 \sum_{j=1}^{S} d_j \langle g_j(x_j) - g_j(\widetilde{x}_j), x_{j+s} - \widetilde{x}_{j+s} \rangle \\
&\leqslant h^2 \sum_{j=1}^{S} d_j \| g_j(x_j) - g_j(\widetilde{x}_j) \| \cdot \| x_{s+j} - \widetilde{x}_{s+j} \| \\
&\leqslant h^2 \sigma / 2 \sum_{j=1}^{S} d_j (\| x_j - \widetilde{x}_j \|^2 + \| x_{s+j} - \widetilde{x}_{s+j} \|^2) \\
&\leqslant h^2 \sigma / 2 \| X - \widetilde{X} \|^2,
\end{aligned}$$

这与 $\sigma h^2 < 2\beta$ 是矛盾的.定理 5.1 证毕.

从定理 5.1 看出,只要 $\sigma > 0$ 充分小,那末方程(4.4)解的存在唯一性,对 h 没有多大限制.对 $\sigma = 0$,此时可以证明方程(5.4)变成(5.3),能否得出结论当 $DL + L^T D > 0$, f_j, $1 \leqslant j \leqslant s$ 满足单调性条件(5.8),(4.3)的解存在唯一? 这个结论是对的,它由 Spijker 在 1983 年给出:

定理 5.2 令 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_s\}$ 是正定阵,$\mathscr{L} = A \otimes I_N$,当 $DA + A^T D$ 正定时,方程

$$y = \mathscr{L}F(y) \tag{5.13}$$

有唯一解.其中

$y = (y_1^T, y_2^T, \cdots, y_s^T)^T$,

$F(y) = (f_1(y_1)^T, f_2(y_2)^T, \cdots, f_s(y_s)^T)^T$,

$\langle f_j(u) - f_j(v), u - v \rangle \leqslant 0, \forall u, v \in R^N, 1 \leqslant j \leqslant S$.

方程(5.13)写成更明确的形式便是

$$y_i = \sum_{j=1}^{S} a_{ij} f_j(y_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant S.$$

这样,我们可把定理 5.1 看成是定理 5.2 的一种推广.定理 5.2 的另一种形式的推广是所谓 IRK 的 D 适用性,其主要思想是把定理 5.2 中的条件

$$\sum_{i=1}^{S} d_i \langle f_i(u) - f_i(v), u - v \rangle \leqslant 0, \forall u, v \in R^N$$

改为

$$\sum_{ij=1}^{S} d_{ij} \langle f_i(u_i) - f_i(v_i), u_j - v_j \rangle \leqslant 0, \forall u_i, v_i \in R^N.$$

其中$(d_{ij}) = D$ 是正定阵.那末可以证明,当 $DA + A^T D$ 正定时,方程(5.3)有唯一解.详细可参看文献[18].

第三章　BDF 方法及块方法

§3.1　引言

标题中出现的两种方法，即 BDF(backward differentiation formula)和块方法(block method)，前者是一种特殊的线性多步法，后者亦可看成是一种 IRK 方法，但由于这两种方法更加实用，列出本章加以特别研究是需要的.

众所周知，对于线性多步法

$$\rho(E)y_n = h\sigma(E)f_n,$$

其中 E 是平移算子，$Ey_n = y_{n+1}$，$y_n \sim y(t_n)$，为使该方法是 A 稳定的，其阶 $p \leqslant 2$. 有人认为，A 稳定的要求太高了，只有低阶的线性多步法才有可能，因此，1969 年，Gear 提出一类实用的所谓 Stiff 稳定的方法.

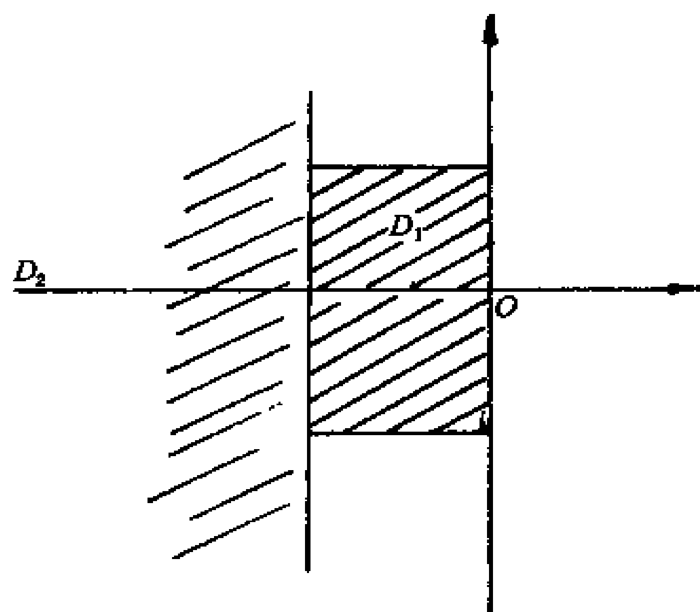


图 3.1

令

$$G = \{\overline{h} : \overline{h} \in D_1 \text{ 或 } \overline{h} \in D_2\},$$

其中

$$D_1 = \{\overline{h} \in C^- : \mathrm{Re}(\overline{h}) \geqslant -a, \mid \mathrm{Im}(\overline{h}) \mid \leqslant b\},$$

$$D_2 = \{\overline{h} \in C^- : \mathrm{Re}(\overline{h}) < -a\}, a, b > 0.$$

定义1.1 如果线性多步法的稳定集 S 满足

$$S \supseteq G,$$

那末就称此方法是 Stiff 稳定的.

下面我们设法导出 BDF 方法及其修改形式.

§3.2 BDF 方法及其改进形式

令 D 及 E 分别表示微分算子及向右平移算子,

$$Dy(x) = y'(x), Ey(x) = y(x+h), \tag{2.1}$$

而 ∇ 表示向后差分算子

$$\nabla y(x) = y(x) - y(x-h) = (I - E^{-1})y(x).$$

那么

$$\nabla = I - E^{-1}, E^{-1} = I - \nabla. \tag{2.2}$$

设 $f(x)$ 是充分光滑的函数,则

$$\begin{aligned} e^{-hD}f(x) &= (I - hD + \frac{1}{2}h^2D^2 - \frac{1}{3!}h^3D^3 + - \cdots)f(x) \\ &= f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2f''(x) - \frac{1}{3!}h^3f'''(x) + \cdots \\ &= f(x-h) \\ &= E^{-1}f(x) \\ &= (I - \nabla)f(x). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} hD &= -\log(I - \nabla) \\ &= \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$hDE^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\nabla^j\right)E^{-1} \tag{2.4}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \nabla^j\right)(I - \nabla)$$

$$= \nabla - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j-1)j} \nabla^j .$$

我们考虑一类特殊的线性多步法.按上面的记号

$$hf_{n+k} + \alpha hf_{n+k-1} = hDE^k y_n + h\alpha DE^{k-1} y_n$$

$$= \Bigg\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}(I - E^{-1})^j +$$

$$\alpha\left[(I - E^{-1}) - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j-1)j}(I - E^{-1})^j\right]\Bigg\} E^k y_n$$

$$\sim \Bigg\{ \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}(I - E^{-1})^j$$

$$+ \alpha\left[(I - E^{-1}) - \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{(j-1)^j}(I - E^{-1})^j\right]\Bigg\} E^k y_n .$$

整理后得

$$hf_{n+k} + \alpha hf_{n+k-1} \tag{2.5}$$

$$= \Bigg\{(1 + \alpha)(I - E^{-1})$$

$$+ \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j}\left(1 - \frac{\alpha}{j-1}\right)(I - E^{-1})^j \Bigg\} E^k y_n .$$

我们把上面的多步法写成如下形式:

$$\rho(E) y_n = h\sigma(E) f_n , \tag{2.6}$$

其中 $\rho(\xi)$及 $\sigma(\xi)$由下式确定:

$$\begin{cases} \rho(\xi) = \xi^k \left\{ (1 + \alpha)(1 - \xi^{-1}) + \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j}\left(1 - \frac{\alpha}{j-1}\right)(1 - \xi^{-1})^j \right\} \\ \sigma(\xi) = \xi^k + \alpha \xi^{k-1}. \end{cases} \tag{2.7}$$

当 $\alpha = 0$ 时,称为 BDF 方法或 Gear 方法,$\alpha \neq 0$ 时称为 MBDF 方法(见文献[61]).

定理 2.1 设 $-1 < \alpha < 1$.若 ξ 是 $\rho(\xi)$之实零点,且 $\xi \neq 1$,则

$0<\xi<1$.

证明 把(2.7)中第一式改写为

$$\rho(\xi)=\xi^k\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\left\{(1+\alpha)+\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j}\left(1-\frac{\alpha}{j-1}\right)\left(1-\frac{1}{\xi}\right)^{j-1}\right\}$$

$$=\xi^k\left(1-\frac{1}{\xi}\right)f(\xi),$$

其中

$$f(\xi)=\left\{(1+\alpha)+\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j}\left(1-\frac{\alpha}{j-1}\right)\left(1-\frac{1}{\xi}\right)^{j-1}\right\},$$

可以看出 $\xi=0$ 不是 $\rho(\xi)$之零点.那末 $\xi\neq1$ 的实零点全部落入 $f(\xi)$的零点集合中.作变换

$$Z=1-\frac{1}{\xi}, \tag{2.8}$$

$f(\xi)$经变换后仍然记为 $f(z)$

$$f(z)=(1+\alpha)+\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j}\left(1-\frac{\alpha}{j-1}\right)z^{j-1}. \tag{2.9}$$

变换(2.8)把 ξ 平面上的单位圆内部映射为 z 平面上圆 $|z-1|=1$的外部.在(2.9)中注意,当 $-1<\alpha<1$ 时,有

$$1+\alpha>0,$$

$$\frac{1}{j}\left(1-\frac{\alpha}{j-1}\right)>0, j=2,3,\cdots,k.$$

故 $f(z)$无正实根.若 $\rho(\xi)=0,\xi\neq1$,则 $f(z)=0$.由(2.8)知

$$0<\xi<1\Leftrightarrow z<0,$$

由此可知,$\rho(\xi)$之实零点必满足 $0<\xi<1$,证毕.

由于 $\alpha\overline{\in}(-1,1)$时定理2.1的结论不再成立,为了保证方法的零稳定性,在MBDF方法中取 $\alpha\in(-1,1)$.在文献[61]中可以找到对各种参数 α 的$\rho(\xi)$的系数表及 $\alpha=-0.8$ 时方法的绝对稳定性区域,并可看出阶 $p=k$ 时的稳定性区域正好与Gear方法($\alpha=0$)中阶 $p=k-1$ 相当,所以MBDF方法有较好的稳定性.

BDF方法的另一种改进是引进两阶导数的修正项:

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=hf_{n+k}+h^2\alpha f_{n+k}^{(1)}. \tag{2.10}$$

文献[52]中称为 DBDF 方法且有详细的推导,并指明,适当选择 α 时,方法的阶为 $k+1$,且绝对稳定性区域比相应的 Enright 的二阶导数法要好.

对于实际使用,MBDF 方法中 $k=4,\alpha=-0.8$ 是值得推荐的,因此时方法几乎是 A 稳定的.如果 $y(x)$的二阶导数 $f^{(1)}$是容易求得的,那末 $k=4$ 时的 DBDF 方法(2.10)也是值得推荐的,它有较好的稳定性及阶 $p=5$.

§3.3 BDF 方法的 Nordsieck 表示

从线性多步法的结构容易看出,当计算到某一步需要改变步长 h 时将遇到麻烦,因为前面计算好的节点上的值将无法使用. Nordsieck 表示将有利于步长的改变.我们用一个简单例子阐明这种表示及其应用.

我们考虑 Gear 三阶公式

$$y_{n+1}=\frac{18}{11}y_n-\frac{9}{11}y_{n-1}+\frac{2}{11}y_{n-2}+\frac{6}{11}hf_{n+1}. \tag{3.1}$$

我们构造一个三次多项式

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

使得

$$\begin{aligned}&p(x_n)=y_n, \qquad (x_n=nh),\\&p'(x_n)=f_n,\\&p(x_{n-1})=y_{n-1},\\&p(x_{n-2})=y_{n-2}.\end{aligned}$$

为此令

$$\begin{aligned}p(x)=\;&y_n+(x-nh)f_n+\frac{(x-nh)^2}{h^2}(\alpha_1y_n\\&+\alpha_2hf_n+\alpha_3y_{n-1}+\alpha_4y_{n-2})+\frac{(x-nh)^3}{h^3}(\beta_1y_n\\&+\beta_2hf_n+\beta_3y_{n-1}+\beta_4y_{n-2}).\end{aligned}$$

显然

$$p(x_n) = y_n,$$
$$p'(x_n) = f_n,$$

再令

$$p(x_{n-1}) = y_{n-1},$$
$$p(x_{n-2}) = y_{n-2},$$

便可设法求出 $\alpha_i, \beta_i, 1 \leqslant i \leqslant 4$. 代入 $p(x)$ 得

$$p(x) = y_n + (x - nh)f_n + \frac{(x - nh)^2}{h^2}\left(-\frac{7}{4}y_n + \frac{3}{2}hf_n + 2y_{n-1} - \frac{1}{4}y_{n-2}\right) + \frac{(x - nh)^3}{h^3}\left(-\frac{3}{4}y_n + \frac{1}{2}hf_n + y_{n-1} - \frac{1}{4}y_{n-2}\right).$$

另外，$p(x)$ 又能展开为 Taylor 级数

$$p(x) = p(x_n) + (x - nh)p'(x_n) + \frac{1}{2}(x - nh)^2 p''(x_n) + \frac{1}{3!}(x - nh)^3 p'''(x_n) .$$

比较上面两式之间同次幂的系数得

$$\frac{h^2}{2}p''(x_n) = \left(-\frac{7}{4}y_n + \frac{3}{2}hf_n + 2y_{n-1} - \frac{1}{4}y_{n-2}\right), \quad (3.2)$$

$$\frac{h^3}{3!}p'''(x_n) = \left(-\frac{3}{4}y_n + \frac{1}{2}hf_n + y_{n-1} - \frac{1}{4}y_{n-2}\right), \quad (3.3)$$

令

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ hy'_{n+1} \\ y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{18}{11} & 0 & -\frac{9}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由(3.1)式得

$$Y_{n+1} = BY_n + hf_{n+1}C. \tag{3.4}$$

再令

$$Z_n = \begin{pmatrix} y_n \\ hy_n' \\ \frac{h^2}{2}y_n'' \\ \frac{h^3}{6}y_n''' \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

由(3.2),(3.3)式得

$$Z_n = TY_n.$$

则

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= TY_{n+1} \\ &= TBY_n + hf_{n+1}TC \\ &= AZ_n + hf_{n+1}L, \end{aligned} \tag{3.5}$$

这里

$$A = TBT^{-1}, \qquad L = TC = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ 1 \\ \frac{6}{11} \\ \frac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

(3.5)式便是 3 阶 Gear 方法的 Nordsieck 表示法. 在使用线性多步法求解微分方程时,往往由于中途改变步长而使得以前存储在节点上的值不再是新的节点上的值而无法使用. 在 Nordsieck 表示中

由于使用了插值而不再发生此类问题.

Nordsieck 表示的另一个用途是便于使用 Newton 迭代来解 y_{n+1}. 令

$$f_{n+1}^{[s]} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[s]}),$$

$$Z_{n+1}^{[s+1]} = AZ_n + hf_{n+1}^{[s]}L, \quad s = 0,1,2,\cdots, \tag{3.6}$$

$$Z_{n+1}^{[s]} = AZ_n + hf_{n+1}^{[s-1]}L, \quad s = 1,2,\cdots, \tag{3.7}$$

于是

$$Z_{n+1}^{[s+1]} = Z_{n+1}^{[s]} + h(f_{n+1}^{[s]} - f_{n+1}^{[s-1]})L. \tag{3.8}$$

构造函数

$$F(Z_{n+1}^{[s]}) = hf_{n+1}^{[s]} - hf_{n+1}^{[s-1]}.$$

如果迭代收敛,则

$$F(Z_{n+1}^{[\infty]}) = 0.$$

命

$$Z_{n+1}^{[\infty]} = Z_{n+1}^{[0]} + \omega L,$$

则

$$F(Z_{n+1}^{[0]} + \omega L) = 0. \tag{3.9}$$

我们设法用 Newton 迭代法来解 ω. Newton 方法为

$$\omega^{[s+1]} = \omega^{[s]} - \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1}_{\omega=\omega^{[s]}} F(Z_{n+1}^{[0]} + \omega^{[s]}L) .$$

注意(3.4)、(3.7)及矩阵 B 的第二行元素为零,可知

$$y'^{[s]}_{n+1} = hf_{n+1}^{[s-1]},$$

从而

$$\omega^{[s+1]} = \omega^{[s]} - \left\{\left(h\frac{\partial f_{n+1}^{[s]}}{\partial y}, -1, 0, 0\right)\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}\right\}^{-1} F(Z_{n+1}^{[0]} + \omega^{[s]}L).$$

上式两边乘向量 L 再加 $Z_{n+1}^{[0]}$ 便得 Newton 迭代公式:

$$Z_{n+1}^{[s+1]} = Z_n^{[s]} - \langle\frac{\partial F}{\partial Z}, L\rangle^{-1} F(Z_{n+1}^{[0]} + \omega^{[s]}L)L,$$

其中

$$\langle\frac{\partial F}{\partial Z},L\rangle=\left(l_0 h\frac{\partial f_{n+1}^{[s]}}{\partial y}-l_1\right).$$

对于 Nordsieck 表示更一般的形式,可参考文献[78].本书不再赘述.

§3.4 块隐式单步法

在 t_n 处 $y(t)$ 的近似值 y_n 要求出后面一组值($y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_{n+k}$).这是块方法的一种想法.1969～1972 年间,Shampine 及 Watts 提出一种简单的块方法.

考虑如下线性多步法的集合

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j^{(i)}y_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j^{(i)}f_{n+j},1\leqslant i\leqslant k. \tag{4.1}$$

令

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}&=(\alpha_j^{(i)})_{k\times k},\widetilde{B}=(\beta_j^{(i)})_{k\times k},1\leqslant i,j\leqslant k,\\
a&=(\alpha_0^{(1)},\alpha_0^{(2)},\cdots,\alpha_0^{(k)},)^T,\\
\widetilde{b}&=(\beta_0^{(1)},\beta_0^{(2)},\cdots,\beta_0^{(k)})^T,\\
\boldsymbol{f}_{n+k}&=(f_{n+1},f_{n+2},\cdots,f_{n+k})^T,\\
Z_{n+k}&=(y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_{n+k})^T.
\end{aligned}$$

则块方法能够表示为

$$\widetilde{A}Z_{n+k}+y_n a=h\widetilde{B}\boldsymbol{f}_{n+k}+hf_n\widetilde{\boldsymbol{b}} \tag{4.2}$$

即

$$Z_{n+k}=-\widetilde{A}^{-1}ay_n+h\widetilde{A}^{-1}\widetilde{B}\boldsymbol{f}_{n+k}+h\widetilde{A}^{-1}\widetilde{b}f_n. \tag{4.3}$$

由于每一个线性多步法是相容的,那末

$$\rho_i(1)=0\Rightarrow\widetilde{A}\boldsymbol{k}^0=-a,$$

其中 $\rho_i(\xi)$ 是第 i 个线性多步法相应的第一特征多项式,$\boldsymbol{k}^0=(1,1,\cdots,1)^T$.

那末(4.2)能改写为

$$Z_{n+k} = \boldsymbol{k}^0 y_n + hBf_{n+k} + hf_n\boldsymbol{b}, \tag{4.4}$$

其中

$$B = \widetilde{A}^{-1}\widetilde{B}, \boldsymbol{b} = \widetilde{A}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{b}} .$$

令

$$\mathscr{L}[Z(t+kh);h] = Z(t+kh) - \boldsymbol{k}^0 y(t) - BZ'(t+kh) - hy'(t)\boldsymbol{b}, \tag{4.5}$$

其中

$$Z(t+kh) = (y(t+h), y(t+2h), \cdots, y(t+kh))^T . \tag{4.6}$$

把(4.5)中 $Z(t+kh)$及 $Z'(t+kh)$在 t 处展成 Taylor 级数：

$$\mathscr{L}[Z(t+kh);h] = d_0 y(t) + d_1 hy'(t) + \cdots + d_q h^q y^{(q)}(t) + \cdots, \tag{4.7}$$

令

$$\boldsymbol{k}^s = (1^s, 2^s, \cdots, k^s)^T, \quad s = 0,1,2,\cdots,$$

则

$$Z(t+kh) = y(t)\boldsymbol{k}^0 + \frac{h}{1!}\boldsymbol{k}^1 y'(t) + \cdots + \frac{h^q}{q!}\boldsymbol{k}^q y^{(q)}(t) + \cdots,$$

$$Z'(t+kh) = y'(t)\boldsymbol{k}^0 + \frac{h}{1!}\boldsymbol{k}^1 y''(t) + \cdots + \frac{h^q}{q!}\boldsymbol{k}^q y^{(q+1)}(t) + \cdots.$$

将上面两式代入(4.5)然后与(4.7)比较 h 之同次幂，得

$$d_0 = 0,$$

$$d_1 = \boldsymbol{k}^1 - B\boldsymbol{k}^0 - \boldsymbol{b},$$

$$d_{s+1} = \frac{1}{(s+1)!}\boldsymbol{k}^{s+1} - \frac{1}{s!}B\boldsymbol{k}^s, \quad s = 1,2,\cdots.$$

为使方法的收敛阶为 $k+1$，令

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_{k+1} = 0, d_{k+2} \neq 0,$$

即

$$\begin{cases} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{k}^1 - B\boldsymbol{k}^0, \\ \boldsymbol{k}^{s+1} = (s+1)B\boldsymbol{k}^s, \quad s = 1,2,\cdots,k. \end{cases} \tag{4.8}$$

把(4.8)中第二式写成矩阵形式

$$(\boldsymbol{k}^2,\boldsymbol{k}^3,\cdots,\boldsymbol{k}^{k+1}) = (2B\boldsymbol{k}^1,3B\boldsymbol{k}^2,\cdots,(k+1)\boldsymbol{k}^k). \quad (4.9)$$

令

$$K = (\boldsymbol{k}^1\boldsymbol{k}^2\cdots\boldsymbol{k}^k),$$

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{k+1} = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k+1 \end{pmatrix},$$

显然有

$$\Lambda_k\boldsymbol{k}^s = \boldsymbol{k}^{s+1}.$$

(4.9)能改写为

$$\Lambda_k K = BK\Lambda_{k+1},$$

或

$$B = \Lambda_k K\Lambda_{k+1}^{-1}K^{-1},$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & & 2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k & k^2 & & k^k \end{pmatrix}$$

是可逆的,因此 B 唯一确定,然后代入(4.8)中第一式求出 $\boldsymbol{b}$.此方法的误差常数定义为

$$d_{k+2} = \frac{1}{(k+2)!}(\boldsymbol{k}^{k+2} - (k+2)B\boldsymbol{k}^{k+1}).$$

定理4.1[63] 方法(4.4)是收敛的,收敛阶为 $k+1$.

下面我们讨论方法(4.4)的数值稳定性.为此用(4.4)去求解试验方程

$$y'(t) = \lambda y(t), \mathrm{Re}(\lambda) < 0,$$

得

$$Z_{n+k} = \boldsymbol{k}^0 y_n + \bar{h} B Z_{n+k} + \bar{h} y_n \boldsymbol{b},$$

故

$$Z_{n+k} = (I - \bar{h}B)^{-1}(\boldsymbol{k}^0 + \bar{h}\boldsymbol{b}) y_n. \tag{4.10}$$

令

$$x(\bar{h}) = (I - \bar{h}B)^{-1}(\boldsymbol{k}^0 + \bar{h}\boldsymbol{b}), \tag{4.10a}$$

$$x(\bar{h}) = (\xi_1(\bar{h}), \xi_2(\bar{h}), \cdots, \xi_k(\bar{h}))^T, \bar{h} = \lambda h,$$

则

$$Z_{n+k} = x(\bar{h}) y_n,$$

以及

$$y_{n+j} = \xi_j(\bar{h}) y_n = [\xi_j(\bar{h})][\xi_k(\bar{h})]^{n/k} y_0,$$

$$y_{n+k} = \xi_k(\bar{h}) y_n = [\xi_k(\bar{h})]^{n/k+1} y_0.$$

显然，此方法在 $\bar{h}$ 处为数值稳定的充要条件为

$$|\xi_j(\bar{h})| < \infty,$$

$$|\xi_k(\bar{h})| < 1.$$

因此其稳定集可定义为

$$S = \{\bar{h} : |\xi_j(\bar{h})| < \infty, |\xi_k(\bar{h})| < 1\}.$$

下面将进一步明确函数 $x(\bar{h})$之表达. 由 Cramer 法则知，$x(\bar{h})$可表示为

$$x(\bar{h}) = \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{P}_i \bar{h}^i / \sum_{i=0}^{k} r_i \bar{h}^i. \tag{4.11}$$

把(4.11)代入(4.10a)，比较 $\bar{h}$ 的同次幂得

$$\boldsymbol{P}_0 = r_0 \boldsymbol{k}_0,$$

$$\boldsymbol{P}_i = B\boldsymbol{P}_{i-1} + r_i \boldsymbol{k}^0 + r_{i-1}\boldsymbol{b}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$

$$-B\boldsymbol{P}_k = r_k \boldsymbol{b}.$$

用归纳法可证得

$$\boldsymbol{P}_i = \sum_{s=0}^{i} r_{i-s} \boldsymbol{k}^s / s!.$$

定理4.2 [64] 令

$$\varphi(t) = (t-1)(t-2)\cdots(t-k),$$

则

$$r_i = (k-i+1)\varphi^{(k-i)}(0)/(k+1)!\ .$$

我们用

$$P_i^k = \sum_{s=0}^{i} r_{i-s} k^s/(s!) = t_i \tag{4.12}$$

表示 P_i 的第 k 个分量,则有如下

定理4.3 [64] r_i 及 t_i 定义于(4.11)及(4.12)则

$$r_i = (-1)^i t_i \qquad i = 0,1,\cdots,k.$$

从表达式(4.11)中的最后一个分量得

$$\xi_k(\bar{h}) = \sum_{i=0}^{k} t_i \bar{h}^i \Big/ \sum_{i=0}^{k} r_i \bar{h}^i = P(\bar{h})/Q(\bar{h}).$$

定理4.4 倘 $Q(\bar{h})$ 于 C^- 内无零点,则方法(4.4)是 A 稳定的.

证明 因为 $Q(\bar{h})$ 于 C^- 内无零点,故

$$|\xi_j(\bar{h})| < \infty, \qquad \bar{h} \in C^-,$$

及 $P(\bar{h})/Q(\bar{h})$ 在 C^- 内解析.再由定理 4.3 知

$$|P(\mathrm{i}y)|/|Q(\mathrm{i}y)| = 1\ ,$$

其中 $y \in (-\infty,\infty)$,$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.另外

$$\lim_{\bar{h}\to\infty} |P(\bar{h})/Q(\bar{h})| = 1,$$

按无界区域的最大模原理知

$$|P(\bar{h})/Q(\bar{h})| < 1, \qquad \bar{h} \in C^-,$$

故

$$S \supseteq C^-,$$

即(4.4)是 A 稳定的.定理 4.4 证毕.

Shampine 等人证明,当 $k \leqslant 8$ 时,(4.4)是 A 稳定的.

§3.5 不等距块方法

如果已知 t_n 上的已知值 y_n,要求出以后节点 $t_{n+j} = t_n + \alpha_j h$

上的近似值，其中 $\alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j) 0 < \alpha_j \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant k$ 为任意实数．为此令

$$a^s = (\alpha_1^s, \alpha_2^s, \cdots, \alpha_k^s), \qquad s = 0,1,2,\cdots$$

代替§3.4中的 k^s．再令

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_k \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\Lambda}_{k+1} = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k+1 \end{pmatrix}.$$

与上节一样，为了方法是 $k+1$ 阶的，类似于(4.9)，同样可得

$$(a^2 a^3 \cdots a^{k+1}) = (2Ba^1, 3Ba^2, \cdots, (k+1)Ba^k)$$

及

$$B = \Lambda_k K \widetilde{\Lambda}_{k+1} K^{-1},$$

其中

$$K = (a^1 a^2 \cdots a^k) .$$

此方法的误差常数为

$$d_{k+2} = \frac{1}{(k+2)!}[a^{k+2} - (k+2)Ba^{k+1}].$$

§3.6 使用高阶导数的块方法

§3.4曾指明"k 块"(即块的大小为 k)时方法的阶至少可达 $k+1$(Shampine 曾指明，当 k 为偶数时，方法的阶可达 $k+2$)．实际使用时，k 不能很大，因为最后求解非线性方程时，方程的阶比用线性多步法要扩大 k 倍，文献[63]中提出使用高阶导数的块方法，其阶至少可达 $kl+l$，这里 l 是方法中使用的 $y(t)$ 的导数的最高阶，例如，$l=2, k=2$，那末收敛阶可达 $p=6$.

直接写出这个方法

$$Z_{n+k} = k^0 y_n + \sum_{s=1}^{l} h^s B_s f_{n+k}^{(s-1)} + \sum_{s=1}^{l} h^s f_n^{(s-1)} b_s, \qquad (6.1)$$

其中

$$B_s = (b_{ij}^{(s)})_{k\times k}, b_s = (b_1^{(s)}, b_2^{(s)}, \cdots, b_k^{(s)})^T, s = 1 \sim l,$$

$$f_{n+k}^{(s)} = (f_{n+1}^{(s)}, f_{n+2}^{(s)}, \cdots, f_{n+k}^{(s)})^T, s = 1,2,\cdots,l-1.$$

为使方法(6.1)的阶达 $kl + l$,令

$$d_0 = d_1 = \cdots = d_{kl+l} = 0, d_{kl+l+1} \neq 0.$$

类似地可得

$$\begin{cases} d_s = k^s/s! - B_1 k^{s-1}/(s-1)! - \cdots \\ \qquad - B_{s-1}k^1 - B_s k^0 - b_s = 0, \\ \qquad s = 1 \sim l, \\ d_m = k^m/m! - B_1 k^{m-1}/(m-1)! - \cdots \\ \qquad - B_l k^{m-l}/(m-l)! = 0, \\ \qquad m = l+1, l+2, \cdots kl + l. \end{cases} \qquad (6.2)$$

先由(6.2)中第二式 $d_m = 0$,设法求出 $B_1, B_2, \cdots, B_l$,然后代入第一式求出 $b_1, b_2, \cdots, b_l$.

定理 6.1 设方法(6.1)之块大小(block size)为 k,使用的最高阶导数的阶数为 l,则存在唯一的系数矩阵 $B_1, B_2, \cdots, B_l$ 及向量 $b_1, b_2, \cdots, b_l$ 使得(6.1)的阶为 $p = kl + l$.

证明 这个定理的证明是繁杂的,不失一般性,我们就 $l = 2$ 及任意的 k 来加以证明,而证明的技巧也许是有用的.

我们在(6.2)中令 $d_m = 0, m = 3,4,\cdots,2k+2$. 其矩阵形式为

$$(B_1\ B_2)\begin{bmatrix} 3k^2 4k^3 \cdots (2k+2)k^{2k+1} \\ 2\cdot 3k^1 3\cdot 4k^2 \cdots (2k+1)(2k+2)k^{2k} \end{bmatrix}$$

$$= (k^3 k^4 \cdots k^{2k+2}),$$

简写为

$$(B_1 B_2)X = (k^3 k^4 \cdots k^{2k+2}). \qquad (6.3)$$

为了证明定理 6.1 的结果,只要证明 X^{-1}存在就行. 但容易

看出

$$\det X \neq 0 \Leftrightarrow \det \widetilde{X} \neq 0,$$

其中

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} k^1 k^2 \cdots k^{2k} \\ 2k^1 3k^2 \cdots (2k+1) k^{2k} \end{bmatrix}.$$

我们来证明

$$\widetilde{X} x = 0 \tag{6.4}$$

只有零解.设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_{2k})^T$ 是(6.4)的解.(6.4)式可以写成向量的形式

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1^2 \\ 2^2 \\ \vdots \\ k^2 \end{bmatrix} + \cdots x_{2k} \begin{bmatrix} 1^{2k} \\ 2^{2k} \\ \vdots \\ k^{2k} \end{bmatrix} = 0, \tag{6.5}$$

$$2x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} + 3x_2 \begin{bmatrix} 1^2 \\ 2^2 \\ \vdots \\ k^2 \end{bmatrix} + \cdots (2k+1) x_{2k} \begin{bmatrix} 1^{2k} \\ 2^{2k} \\ \vdots \\ k^{2k} \end{bmatrix} = 0, \tag{6.6}$$

命多项式

$$f(t) = x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_{2k} t^{2k}.$$

由(6.5)知

$$f(j) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

再命

$$g(t) = [t f(t)]' = t f'(t) + f(t).$$

由(6.6)知

$$g(j) = j f'(j) + f(j) = 0 \Rightarrow f'(j) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

说明 $j=1,2,\cdots,k$ 是 $f(t)$ 之二重根,再由 $f(0)=0$,则 $f(t)$ 有 $2k+1$ 个零点,故 $f(t)\equiv 0$,推知 $x_i=0, 1\leqslant i\leqslant 2k$.定理证毕.

下面我们来讨论(6.1)之数值稳定性,即,在什么条件下它是 A 稳定的?

与§3.4一样,我们用(6.1)去求解试验方程

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \qquad \mathrm{Re}(\lambda) < 0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

得

$$Z_{n+k} = \left(I - \sum_{s=1}^{l} \bar{h}^s B_s\right)^{-1} \left(k^0 + \sum_{s=1}^{l} \bar{h}^s b_s\right) y_n$$
$$= x(\bar{h}) y_n,$$

其中

$$x(\bar{h}) = (\xi_1(\bar{h}), \xi_2(\bar{h}), \cdots, \xi_k(\bar{h}))^T$$
$$= \sum_{i=0}^{kl} P_i \bar{h}^i \Big/ \sum_{i=0}^{kl} r_i \bar{h}^i,$$

其中 P_i 为 k 维向量,r_i 为纯量,$\bar{h} = \lambda h$.

定理6.2[64] 设方法(6.1)的阶 $P = kl + l$,则

$$P_i = \sum_{s=0}^{i} r_{i-s} k^s / s!, \qquad 0 \leqslant i \leqslant kl, \tag{6.7}$$

$$r_{kl-s} = (s+l)(s+l-1)\cdots(s+1)\varphi^{(s)}(0)/(kl+l)!, \tag{6.8}$$

$$P_i^{(k)} = t_i = (-1)^i r_i, \qquad 0 \leqslant i \leqslant kl. \tag{6.9}$$

这里

$$\varphi(x) = [(x-1)(x-2)\cdots(x-k)]^l.$$

这个定理的证明过于繁杂,可参考文献[64].

利用定理6.2的结果,不难看出

$$\xi_k(\bar{h}) = \frac{\sum_{i=0}^{kl+l} (-1)^i r_i \bar{h}^i}{\sum_{i=0}^{kl+l} r_i \bar{h}^i}, \tag{6.10}$$

其中 r_i 由(6.8)确定.

为了证明(6.1)的 A 稳定性,当且仅当 $\bar{h} \in C^-$ 时 $|\xi_k(\bar{h})| < 1$,按定理4.4的证明思路,当且仅当 $\bar{h} \in C^-$ 时 $\sum_{i=0}^{kl} r_i \bar{h}^i \neq 0$.

定理6.3[64] 如果方法(6.1)的阶 $P=kl+l$,则当

$$
\begin{aligned}
&l=1, && k\leqslant 8,\\
&l=2, && k\leqslant 5,\\
&l=3,4 && k\leqslant 3,\\
&5\leqslant l\leqslant 10, && k\leqslant 2,\\
&l\geqslant 11, && k=1,
\end{aligned}
$$

时方法是 A 稳定的.

这个定理的证明过于复杂,我们没有办法全部介绍给读者,但证明的思路是简单的,只要设法判定(6.10)的分母在左半平面内没有零点即可. Hurwitz 定理(见文献[64])可用来判别实系数多项式在左半平面内是否有零点.、

§3.7 块 θ 方法

这一节,我们将细致地介绍所谓块 θ 方法,它有较好的稳定性,又不需要使用高阶导数,是一个很有潜力的方法,它与 Shampine 提出的块方法相比,计算时需要前面的几个(k 个)初始值,才能起步.

考虑解常微分方程初值问题的 θ 方法,

$$y_{n+1}=y_n+\theta hf(t_{n+1},y_{n+1})+(1-\theta)hf(t_n,y_n), \quad (7.1)$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

θ 方法看上去十分简单,但对精度要求不高的问题是十分有效的. 当 $\theta=\dfrac{1}{2}$ 时是梯形公式,是 A 稳定的线性多步法中最好的.

我们先形式地模仿(7.1)给出

$$
\begin{aligned}
Z_{s+1}=Z_s&+\theta hBF(Z_{s+1}) \qquad (7.2)\\
&+(1-\theta)hBF(Z_s), \quad s=0,1,2,\cdots.
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&B=(b_{ij})_{k\times k},\\
&Z_s=(y_{sk},y_{sk+1},\cdots,y_{sk+k-1})^T,\\
&Z_{s+1}=(y_{sk+k},y_{sk+k+1},\cdots,y_{sk+2k-1})^T,
\end{aligned}
$$

$$F(Z_s) = (f_{sk}, f_{sk+1}, \cdots, f_{sk+k-1})^T,$$
$$F(Z_{s+1}) = (f_{sk+k}, f_{sk+k+1}, \cdots, f_{sk+2k-1})^T,$$
$$y_n \sim y(t_n),$$
$$f_n = f(t_n, y_n).$$

与§3.6中的情况类似,块θ方法(7.2)的阶为p的充分必要条件为

$$d_0 = d_1 = \cdots = d_p = 0, d_{p+1} \neq 0. \tag{7.3}$$

其中

$$\begin{cases} d_0 = k_1^0 - k_0^0 = 0, \\ d_1 = k_1^1 - \theta B k_1^0 - (1-\theta) B k_0^0 - k_0^1, \\ \cdots \\ d_j = \dfrac{1}{j!} k_1^j - \dfrac{1}{(j-1)!} \theta B k_1^{j-1} - \dfrac{1}{(j-1)!}(1-\theta) B k_0^{j-1} - \dfrac{1}{j!} k_0^j, \\ j = 1, 2, \cdots, p. \end{cases} \tag{7.4}$$

注意到(7.3)及(7.4)能写成矩阵的形式

$$H_p = B X_p, \tag{7.5}$$

其中

$$H_p = [k_1^1 - k_0^1, k_1^2 - k_0^2, \cdots, k_1^p - k_0^p],$$
$$k_1^j = (k^j, (k+1)^j, \cdots, (2k-1)^j)^T,$$
$$k_0^j = (0^j, 1^j, \cdots, (k-1)^j)^T,$$
$$X_p = [\theta k_1^0 + (1-\theta) k_0^0, 2\theta k_1^1 - 2(1-\theta) k_0^1 \cdots,$$
$$p\theta k_1^{p-1} - p(1-\theta) k_0^{p-1}]$$

定理7.1[31] k维块θ方法(7.1)之最高可达阶是

$$p^* = \begin{cases} k & k = 1, \quad \theta \neq \dfrac{1}{2}, \\ k+1 & k = 1, \quad \theta = \dfrac{1}{2}, \\ k & k \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \end{cases} \tag{7.6}$$

证明 当$p=k$,于是H_k及X_k是可逆的,这个结论的证明类

似于定理 7.2 的证明.此时块 θ 方法的阶至少是 k.对于 $k=1$,结论是已知的,即

$$p^* = \begin{cases} k & \text{当 } \theta \neq \frac{1}{2}, \\ k+1 & \text{当 } \theta = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

当 $k \geqslant 2$ 时,H_k 的列,张成线性空间 R^k,即存在唯一向量 $a=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)^T$,使得

$$k_1^{k+1} - k_0^{k+1} = H_k a. \tag{7.7}$$

从(7.7)知道,k 次多项式 $p(\mu)$ 有 k 个不同的零点 $\mu=0,1,\cdots,k-1$,其中

$$\begin{aligned} p(\mu) = & (k+\mu)^{k+1} - \mu^{k+1} - \alpha_1[(k+\mu)-\mu] \\ & - \alpha_2[(k+\mu)^2 - \mu^2] - \cdots \\ & - \alpha_k[(k+\mu)^k - \mu^k]. \end{aligned} \tag{7.8}$$

如果方法的阶是 $k+1$,于是 $d_p = d_{k+1} = 0$,即

$$k_1^{k+1} - k_0^{k+1} = (k+1)H_k X_k^{-1}[\theta k_1^k - (1-\theta)k_0^k].$$

再从(7.7)得

$$(k+1)[\theta k_1^k + (1-\theta)k_0^k] = X_k a. \tag{7.9}$$

构造多项式

$$\begin{aligned} q(\mu) = & (k+1)[\theta(k+\mu)^k + (1-\theta)\mu^k] \\ & - \alpha_1[\theta(k+\mu)^0 + (1-\theta)\mu^0] \\ & - \alpha_2[2\theta(k+\mu) - 2(1-\theta)\mu] - \cdots \\ & - \alpha_k[k\theta(k+\mu)^{k-1} + k(1-\theta)\mu^{k-1}]. \end{aligned} \tag{7.10}$$

由(7.9)式,它有 k 个不同的零点 $\mu=0,1,\cdots,k-1$. 于是比较 $p(\mu)$ 及 $q(\mu)$ 的最高次项系数知

$$p(\mu) - kq(\mu) \equiv 0. \tag{7.11}$$

令

$$h(\mu) = (k+\mu)^{k+1} - \mu^{k+1} - (k+1)k[\theta(k+\mu)^k + (1-\theta)\mu^k],$$

$$h_j(\mu) = kj[\theta(k+\mu)^{j-1} + (1-\theta)\mu^{j-1}] - [(k+\mu)^j - \mu^j],$$

$$j = 2,3,\cdots,k.$$

于是

$$p(\mu) - kq(\mu) = h(\mu) + a_2h_2(\mu) + \cdots + a_kh_k(\mu).$$

(i)当 $\theta \neq \frac{1}{2}$，$h(\mu)$是 $k-1$ 次多项式，而 $h_j(\mu)$是 $j-2$ 次多项式，$j=2,3,\cdots,k$. 于是 $h_2(\mu),h_3(\mu),\cdots,h_k(\mu),h(\mu)$ 线性无关.

(ii)当 $\theta = \frac{1}{2}$，$h(\mu)$是 $k-2$ 次多项式，$h_2(\mu)\equiv 0$，$h_j(\mu)$ $(3\leqslant j\leqslant k)$是 $j-3$ 次多项式，于是 $h(\mu),h_3(\mu),\cdots,h_k(\mu)$线性无关.

于是

$$p(\mu) - kq(\mu) \neq 0. \tag{7.12}$$

但(7.12)与(7.11)是矛盾的，定理 7.1 证毕.

定理7.2 倘 k 维、k 阶块 θ 方法的系数矩阵为 B，则 B 的谱 $\sigma[B]=\{k\}$.

证明 由(7.5)

$$B = H_kX_k^{-1}. \tag{7.13}$$

设 $\lambda\in\sigma[B]$，那末存在 $\tilde{x}\neq 0$，使得

$$B\tilde{x} = \lambda\tilde{x} \tag{7.14}$$

或

$$H_kX_k^{-1}\tilde{x} = \lambda\tilde{x}.$$

令 $X_k^{-1}\tilde{x}=x$，$\tilde{x}=X_kx$. 于是(7.14)等价于

$$H_kx = \lambda X_kx$$

或

$$(\lambda X_k - H_k)x = 0\ ,$$

其中 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1})^T\in C^k$.

构造多项式

$$g(\mu) = x_0(\lambda - k) + x_1(2\lambda\theta(\mu + k) + 2\lambda(1-\theta)\mu + \mu^2 - (\mu+k)^2) + \cdots + x_j(j\lambda\theta(\mu+k)^{j-1} + j\lambda(1-\theta)\mu^{j-1}$$

$$+\mu^j-(\mu+k)^j)+x_{k-1}(k\lambda\theta(\mu+k)^{k-1}+k\lambda(1-\theta)\mu^{k-1}$$
$$+\mu^k-(\mu+k)^k).$$

显然 $g(\mu)$之次数不超过 $k-1$. 假设 $\lambda\neq k$,从(7.15)或(7.16)能够看出,$0,1,\cdots,k-1$ 是 $g(\mu)$之零点,从而 $g(\mu)\equiv 0$. 因此

$$x_0=x_1=\cdots=x_{k-1}=0,$$

即

$$\det[\lambda X_k-H_k]\neq 0,$$

而当 $\lambda=k$ 时,容易验证

$$\det[\lambda X_k-H_k]=0,$$

所以 $\sigma[B]=\{k\}$.

定理7.3 倘使 k 维块 θ 方法的阶 $p\geqslant 1$,则 $k\in\sigma[B]$.

证明 因为 X_p 及 H_p 的第一列分别是 e 及 ke,这里 $e=(1,1\cdots,1)^T$. 因为 $p\geqslant 1$,由(7.5)知

$$Be=ke,$$

定理 7.3 证毕.

为了分析 k 维、k 阶块 θ 方法的数值稳定性,我们用方法(7.2)去解试验方程

$$y'(t)=\lambda y(t),\quad \mathrm{Re}(\lambda)<0,$$

导致差分方程

$$(I-\theta\bar{h}B)Z_{s+1}=(I+(1-\theta)\bar{h}B)Z_s$$

或

$$Z_{s+1}=(I-\theta\bar{h}B)^{-1}(I+(1-\theta)\bar{h}B)Z_s$$
$$=[(I-\theta\bar{h}B)^{-1}(I+(1-\theta)\bar{h}B]^sZ_0.$$

那末$\lim\limits_{s\to\infty}Z_s=0$ 当且仅当

$$(I-\theta\bar{h}B)^{-1}\quad 存在,$$
$$\rho[(I-\theta\bar{h}B)^{-1}(I+(1-\theta)\bar{h}B)]<1.$$

这里 $\bar{h}=\lambda h$,$\rho(M)$表示矩阵 M 的谱半径.

如果 $z\in\sigma[B]$,那末用谱映象定理知

$$g_\theta(z,\overline{h}) = \frac{1+(1-\theta)\overline{h}z}{1-\theta\overline{h}z}$$

是矩阵$(I-\theta\overline{h}B)^{-1}(I+(1-\theta)\overline{h}B)$的特征值.

方法(7.2)是 A 稳定的充要条件为

$$\max\{|g_\theta(z,\overline{h})|: z \in \sigma(B)\} < 1$$

对任意的 $\overline{h}\in C^-$ 成立.

定理7.4 如果$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$,则块 θ 方法为A 稳定的充分必要条件为

$$\sigma[B] \subseteq \{x \in R: x > 0\}.$$

证明 当$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$,类似于第一章§1.4中的讨论,易得

$$\max\{|g_\theta(z,\overline{h})|: z \in \sigma[B], z > 0\} < 1$$

对任意 $\overline{h}$,$\mathrm{Re}(\overline{h})<0$ 成立,从而 $\sigma[B]\subseteq\{x\in R: x>0\}$时方法是 A 稳定的.

又若 $z\in\sigma[B]$,$z\overline{\in}\{x\in R: x>0\}$.则令 $z=r\cdot e^{i\varphi}$,$\overline{h}=r_1e^{i\varphi_1}$,这里 $\varphi\neq 0$,$\frac{\pi}{2}<\varphi_1<\frac{3\pi}{2}$,$i=\sqrt{-1}$.那末适当选择 φ_1 可使得$\mathrm{Re}(z\overline{h})>0$,从而对部分 $\overline{h}$ 会有

$$|g_\theta(z,\overline{h})| \geqslant 1.$$

定理 7.4 证毕.

由定理 7.4,当$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$ 时,k 维块θ 方法(7.2)都是 A 稳定的,因为 $\sigma[B]=\{k\}$.

第四章　线性延时微分方程的数值解

§4.1　引言

延时微分方程(delay differential equations)有时也称微分差分方程(differential-difference equations),在许多实际问题中出现,如种群的繁殖,人口的增长,控制论,电力网络中的能量损耗,神经网络等等.在数值处理时,以往有许多学者认为与常微分方程数值解没有区别,实则不然,例如要数值地求解

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + by(t-\tau) & t \geqslant 0, \tau > 0 \\ y(t) = \varphi(t) & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

假定数值解的步长为 $h>0, t_n = nh, y_n \sim y(t_n)$,这时将发生一个问题,即 $t_n - \tau$ 不一定在数值解的节点上.我们用 θ 方法

$$y_{n+1} = y_n + h\theta f(t_{n+1}, y_{n+1}) + h(1-\theta)f(t_n, y_n) \tag{1.2}$$

去求解(1.1)时得如下差分方程:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n &+ h\theta[ay_{n+1} + by_{n+1-m+\delta}] \\ &+ h(1-\theta)[ay_n + by_{n-m+\delta}]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

这里 $(m-\delta)h = \tau, \tau > 0$ 为常数延时量, $0 \leqslant \delta < 1$.如果 $\delta = 0$,则递推公式(1.3)可以一直进行下去.如 $0 < \delta < 1$,那末(1.3)式无法进行计算.为此必须进行插值.

令

$$v_n = \delta y_{n-m+1} + (1-\delta)y_{n-m}, \tag{1.4}$$

$$v_{n+1} = \delta y_{n+1-m+1} + (1-\delta)y_{n+1-m}. \tag{1.5}$$

(1.3)式变成

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n &+ h\theta[ay_{n+1} + bv_{n+1}] \\ &+ h(1-\theta)[ay_n + bv_n]. \end{aligned}$$

将(1.4)及(1.5)代入上式得

$$y_{n+1} = y_n + h\theta[ay_{n+1} + b(\delta y_{n+2-m} + (1-\delta)y_{n+1-m})]$$
$$+ h(1-\theta)[ay_n + b(\delta y_{n+1-m} + (1-\delta)y_{n-m})].$$

令 $\overline{a} = ha, \overline{b} = hb$,上式化为

$$(1-\theta\overline{a})y_{n+1} = [1+(1-\theta)\overline{a}]y_n + \theta\overline{b}[\delta y_{n+2-m} + (1-\delta)y_{n+1-m}] + (1-\theta)\overline{b}[\delta y_{n+1-m} + (1-\delta)y_{n-m}]. \tag{1.6}$$

为了研究差分方程的数值稳定性,令 $z^n = y_n$,代入(1.6)式

$$(1-\theta\overline{a})z^{n+1} = [1+(1-\theta)\overline{a}]z^n + \theta\overline{b}[\delta z^{n+2-m} + (1-\delta)z^{n+1-m}] + (1-\theta)\overline{b}[\delta z^{n+1-m} + (1-\delta)z^{n-m}].$$

约去公共因子 z^{n-m}得(1.6)的所谓特征方程

$$p_m(z) = 0, \tag{1.7}$$

$$p_m(z) = q(z)z^m - p(z,\delta), \tag{1.7a}$$

$$q(z) = z - (1+(1-\theta)\overline{a})/(1-\theta\overline{a}), \tag{1.7b}$$

$$p(z,\delta) = (\delta z + (1-\delta))(\theta z + (1-\theta))\overline{b}/(1-\theta\overline{a}). \tag{1.7c}$$

为了引进 Barwell 的定义,先给出如下定理.它的证明,我们在以后的章节中给出.

定理1.1 如果方程(1.1)的系数满足

$$\mathrm{Re}(a) < 0, \tag{1.8}$$

$$|b| < -\mathrm{Re}(a), \tag{1.9}$$

那末对于一切初始函数 $\varphi(t) \in C(-\infty, 0]$,(1.1)之解 $y(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

类似于常微分方程数值解时的 A 稳定性,我们有 Barwell 的

定义1.1 设方程(1.1)的系数 a,b 满足(1.8)和(1.9).用某数值方法求解(1.1),在节点上的近似值 y_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

其中 $mh = \tau, h > 0$ 为步长,$m \geqslant 1$ 为自然数,$\tau > 0$ 为常数延时量,就称此数值方法为 P 稳定的.

值得注意的是，对任意步长 $h>0$，并不能保证有一个自然数 m，使得 $mh=\tau$. 因此我们有

定义1.2 设方程(1.1)的系数 a,b 满足(1.8)～(1.9). 用某数值方法求解(1.1)，在节点上的近似值 y_n 对任意 $h>0$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

我们就称该方法是 *GP* **稳定的**.

§4.2 θ 方法的渐近稳定性

一个多项式称为 Schur 多项式，如果它的一切零点皆位于单位圆内部. 如果对任意的 $\bar{a},\bar{b}$，其中 a,b 满足条件(1.8)～(1.9)，$p_m(z)=q(z)z^m-p(z,\delta)$ 都是 Schur 多项式，那末根据差分方程的理论

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0. \tag{2.1}$$

换句话说，θ 方法是 GP 稳定的 $\Leftrightarrow \forall \bar{a},\bar{b}$ 满足(1.8)～(1.9)，$\forall 0\leqslant\delta<1$，$p_m(z)$ 是 Schur 多项式.

在多项式 $p_m(z)$ 中出现的自然数 m 将随着 $h\to 0$ 或者 $\tau\to\infty$ 而趋于无穷. 因此我们碰到在 DDE$_s$ 的数值解中重要的理论问题便是如何判定一个任意高次的多项式 $p_m(z)$ 是 Schur 多项式. 具体说来便是，若

$$p_m(z) = z^m q(z) - p(z,\delta), \tag{2.2}$$

$q(z)$ 是固定的 q 次多项式，$p(z,\delta)$ 是固定的 p 次多项式，那末在什么条件下，对任意的自然数 $m\geqslant 1$，$p_m(z)$ 是 Schur 多项式. 我们先解决一个特殊情况，即(1.7)中修定的 $p_m(z)$，它在什么条件下是 Schur 多项式. 为此先把 $p_m(z)$ 改写为如下形式：

$$p_m(z) = z^{m+1} - cz^m - p(z). \tag{2.3}$$

其中 $p(z)$ 为固定的 k 次多项式，c 为常数，分别表示于(1.7c)，(1.7b).

我们用 C 表示正向单位圆周 $\{z:|z|=1\}$，再令 D 是 C 上任意一段圆弧，在 D 上复变量函数 $f(z)\neq 0$，则用 $\triangle[\arg f(z);D]$ 表

示当 z 跑遍 D 时 $f(z)$ 的幅角增量.要给出(2.3)为 Schur 多项式的充分必要条件是非常艰难的事,但考虑到证明的技巧对今后的讨论十分有用,我们将不厌其繁地介绍这个定理的证明(参看文献[28]).

引理2.1 令 $p_m(z)$ 给定于(2.3).对一切 $m \geqslant \max\{1, k-1\}$ $p_m(z)$ 是 Schur 多项式,则

$$|p(z)| \leqslant |z-c| \qquad \forall z \in C.$$

证明 因为多项式零点个数不超过该多项式的次数,那末对任意 $z \in C$,使得

$$|p(z)| = |z-c|$$

成立的点数 $\leqslant \max\{2, 2k\}$,因此,我们可把单位圆周 C 分割成圆弧 $D_1, D_2, \cdots, D_q$ 及 $E_1, E_2, \cdots, E_r$ 组成,而且

$$|p(z)| \leqslant |z-c| \qquad \forall z \in D_j, 1 \leqslant j \leqslant q,$$

$$|p(z)| > |z-c| \qquad \forall z \in E_j, 1 \leqslant j \leqslant r,$$

其中 $q \leqslant \max\{2, 2k\}$, $r = \max\{2, 2k\}$.

倘使点 c 位于 D_j 上,那末 $p(c) = 0$,因此 $p_m(c) = 0$,但是这与 $p_m(z)$ 是 Schur 多项式违背,因此 $c \overline{\in} D_j$. 当 $z \in D_j, 1 \leqslant j \leqslant q$, $p_m(z)$ 能改写为

$$\begin{aligned} p_m(z) &= z^m(z-c)[1 - p(z)/(z^{m+1} - (z)] \\ &= z^m(z-c)[1 - \delta(z)], \end{aligned}$$

其中 $|\delta(z)| \leqslant 1, \delta(z) \neq 1$.使用等式

$$\begin{aligned} \Delta[\arg p_m(z); D_j] &= \Delta[\arg z^m; D_j] + \Delta[\arg(z-c); D_j] \\ &\quad + \Delta[\arg(1 - \delta(z); D_j], \end{aligned} \tag{2.4}$$

再令 $|D_j|$ 表示 D_j 之弧长,那末

$$\Delta[\arg p_m(z); D_j] \leqslant m\,|D_j| + 3\pi, \quad 1 \leqslant j \leqslant q. \tag{2.5}$$

类似地对 $z \in E_j$,有

$$p_m(z) = p(z)(-1 + \varepsilon(z)),$$

其中

$$\varepsilon(z) = (z^{m+1} - cz^m)/p(z), \quad |\varepsilon(z)| < 1.$$

对 $z\in E_j$ 有

$$\Delta[\arg p_m(z);E_j]=\Delta[\arg p(z);E_j] + \Delta[\arg(-1+\epsilon(z);E_j] \leqslant \Delta[\arg p(z);E_j]+\pi, 1\leqslant j\leqslant r, \tag{2.6}$$

因为 $p_m(z)$是 Schur 多项式，$p_m(z)$是 $m+1$ 次多项式，它在单位圆内部有 $m+1$ 个零点，没有极点，按幅角原理

$$\Delta[\arg p_m(z);C]=(m+1)2\pi.$$

再从(2.5)～(2.6)便得

$$(m+1)2\pi\leqslant\sum_{j=1}^{q}(m|D_j|+3\pi)+\sum_{j=1}^{r}(\Delta[\arg p(z);E_j]+\pi).$$

上式两边各除$(m+1)$，并令 $m\to\infty$，得

$$2\pi\leqslant|D_1|+|D_2|+\cdots+|D_q|.$$

从上式立即看出 $r=0$，从而证明了引理 2.1.

引理2.2 设 $p_m(z)$给定于(2.3)，对 $\forall\, m\geqslant\max\{1,k-1\}$，$p_m(z)$是 Schur 多项式，则

$$|c|<1.$$

证明 使用证明引理 2.1 时的记号，那末已经证明 $r=0,q=1,D_1=C$. 且在引理 2.1 的证明中已指明 $c\overline{\in}D_1$，即$|c|\neq1$. 在(2.4)中，由于 z 绕 D_1 周时，$|\delta(z)|\leqslant1$ 及 $\delta(z)\neq1$，故$(1-\delta(z))$的幅角增量为零，即

$$\Delta[\arg(1-\delta(z));D_1]=0,$$

此时(2.4)成为

$$(m+1)2\pi=\Delta[\arg p_m(z);D_1] =2m\pi+\Delta[\arg(z-c);D_1],$$

因此

$$\Delta[\arg(z-c);D_1]=2\pi,$$

按幅角原理$|c|<1$，引理 2.2 证毕.

定理2.3 $p_m(z)$给定于(2.3). 对任意 $m\geqslant\max\{1,k-1\}$，$p_m(z)$是 Schur 多项式的充分必要条件为

(a) $|c|<1$,

(b) $|p(z)|\leqslant|z-c|$, $\forall z\in C$,

(c) $p_m(z)\neq 0$, $\forall z\in C, \forall m\geqslant\max\{1,k-1\}$.

证明 若对 $\forall m\geqslant\max\{1,k-1\}$, $p_m(z)$是 Schur 多项式，则从引理 2.1～引理 2.2，知(a)及(b)必成立，(c)成立是显然的事.

反之设(a)(b)及(c)成立，则

$$\begin{aligned}\Delta[\arg p_m(z);C] &= \Delta[\arg z^m;C]+\Delta[\arg(z-c);C]\\&\quad+\Delta[\arg(1-\delta(z));C]\\&=2m\pi+2\pi+0,\end{aligned}$$

故

$$\Delta[\arg p_m(z);C]=(m+1)2\pi.$$

那末 $m+1$ 次多项式有 $m+1$ 个零点在单位圆内部，即 $p_m(z)$是 Schur 多项式，定理 2.3 证毕.

定理2.4 $p_m(z)$给定于(2.3)，对一切 $m\geqslant\max\{1,k-1\}$, $p_m(z)$是 Schur 多项式的充分条件是

(a′) $|c|<1$,

(b′) $|p(z)|<|z-c|$, $\forall z\in C$.

证明 因为条件(b′)蕴含着(c)，故 $p_m(z)$是 Schur 多项式.

下面考虑比(2.3)稍稍广泛一些的形式

$$p_m(z)=q(z)z^m-p(z), \tag{2.7}$$

其中 $q(z)$及 $p(z)$是两个多项式，次数分别是 q 及 p. 我们可以证明类似于定理 2.3 那样的定理 2.7. 为此先给出

引理2.5 设 $p_m(z)$给定于(2.7)，对一切 $m\geqslant\max\{1,p-q\}$, $p_m(z)$是 Schur 多项式，则

$$|p(z)|\leqslant|q(z)|, \forall z\in C.$$

证明 因为一个多项式之零数不超过该多项式的次数，那末对 $z\in C$，使得

$$|p(z)|=|q(z)|$$

成立的那种 z 的个数不超过 $\max\{2p,2q\}$，因而是有限多个点，故

能把单位圆 C 分割成有限多个圆弧组成，即 $\widetilde{D}_1,\widetilde{D}_2,\cdots,\widetilde{D}_{\tilde{q}}$ 及 $\widetilde{E}_1,\widetilde{E}_2,\cdots,\widetilde{E}_{\tilde{r}}$，使得

$$|p(z)|\leqslant|q(z)|,\quad z\in\widetilde{D}_j,\quad 1\leqslant j\leqslant\tilde{q},$$
$$|p(z)|>|q(z)|,\quad z\in\widetilde{E}_j,\quad 1\leqslant j\leqslant\tilde{r}.$$

设 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{\bar{q}}$ 是 $q(z)$ 的零点，那末

$$\zeta_i\overline{\in}\widetilde{D}_j,\qquad 1\leqslant j\leqslant\tilde{q},\qquad 1\leqslant i\leqslant q.$$

因为若 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_q$ 某一点属于 $\widetilde{D}_j$，说 $\zeta\in\widetilde{D}_j$，则导致 $p(\zeta)=0$，及 $p_m(\zeta)=0$，这是不可能的，因为 $p_m(z)$ 是 Schur 多项式.

当 $z\in\widetilde{D}_j$ 时，$q(z)\neq0$ 及

$$\begin{aligned}p_m(z)&=q(z)z^m\left[1-\frac{p(z)}{q(z)z^m}\right]\\&=q(z)z^m[1-\delta(z)].\end{aligned}$$

此外 $|\delta(z)|\leqslant1$ 及 $\delta(z)\neq1$. 另外

$$\begin{aligned}\Delta[\arg p_m(z);\widetilde{D}_j]&=\Delta[\arg z^m;\widetilde{D}_j]+\Delta[\arg q(z);\widetilde{D}_j]\\&\quad+\Delta[\arg(1-\delta(z));\widetilde{D}_j].\end{aligned}$$

继续使用前面的记号，

$$\Delta[\arg p_m(z);\widetilde{D}_j]\leqslant m\,|\widetilde{D}_j|+q\cdot2\pi+\pi,\quad 1\leqslant j\leqslant\tilde{q}.$$

类似地对 $z\in\widetilde{E}_j$

$$p_m(z)=p(z)(-1+\varepsilon(z)),$$

其中

$$\varepsilon(z)=q(z)z^mp(z)^{-1},\ |\varepsilon(z)|<1.$$

对 $z\in E_j$

$$\begin{aligned}\Delta[\arg p_m(z);\widetilde{E}_j]&=\Delta[\arg p(z);\widetilde{E}_j]\\&\quad+\Delta[\arg(-1+\varepsilon(z));\widetilde{E}_j]\\&\leqslant\Delta[\arg p(z);\widetilde{E}_j]+\pi,\quad 1\leqslant j\leqslant\tilde{r}.\end{aligned}$$

$p_m(z)$是 $m+q$ 次多项式，它在单位内部有 $m+q$ 个零点，按幅角原理

$$(m+q)2\pi \leqslant \sum_{j=1}^{\tilde{q}}(m\,|\,\widetilde{D}_j\,|+(2q+1)\pi)$$

$$+\sum_{j=1}^{\tilde{r}}(\Delta[\arg p(z);\widetilde{E}_j]+\pi),$$

上式两边除$(m+q)$再令 $m\to\infty$得

$$2\pi \leqslant \sum_{j=1}^{\tilde{q}}\,|\,\widetilde{D}_j\,|,$$

这里导致 $\tilde{r}=0,\tilde{q}=1,\widetilde{D}_1=C$. 引理 2.5 证毕.

引理2.6 设 $p_m(z)$给定于(2.7)，对$\forall\, m\geqslant \max\{1,p-q\}$，$p_m(z)$是 Schur 多项式，则

$$q(z)\text{ 是 Schur 多项式}. \tag{2.8}$$

证明 在上一个引理中我们已指明，$q(z)$的任一零点 $\zeta\overline{\in}\widetilde{D}_j$，今 $\tilde{r}=0,\tilde{q}=1,\widetilde{D}_1=C$，故 $\zeta\overline{\in}\widetilde{D}_1$. 那末 $\Delta[\arg q(z);\widetilde{D}_1]$有定义且

$$\begin{aligned}\Delta[\arg p_m(z);\widetilde{D}_1] &= (m+q)2\pi\\ &= \Delta[\arg z^m;\widetilde{D}_1]+\Delta[\arg q(z);\widetilde{D}_1]+0\\ &= 2m\pi+\Delta[\arg q(z);\widetilde{D}_1],\end{aligned}$$

从而

$$\Delta[\arg q(z);\widetilde{D}_1]=2q\pi.$$

按幅角原理，$q(z)$在单位内部有 q 个零点，引理 2.6 证毕.

定理2.7 $p_m(z)$给定于(2.7)，对一切 $m\geqslant\max\{1,p-q\}$，$p_m(z)$是 Schur 多项式的充要条件为

(i) $q(z)$是 Schur 多项式，

(ii) $|p(z)|\leqslant|q(z)| \quad \forall\, z\in C$，

(iii) $p_m(z)\neq 0 \quad \forall\, z\in C, \forall\, m\geqslant\max\{1,p-q\}$.

证明 倘对 $\forall m \geqslant \max\{1, p-q\}$，$p_m(z)$是 Schur 多项式，则由引理 2.5，引理 2.6，知(i)～(ii)成立，当 $z \in C$ 时，(iii)成立是显然的.

反之设(i)～(iii)成立，于是 $z \in C$ 时 $p_m(z) \neq 0$，及

$$
\begin{aligned}
\Delta[\arg p_m(z); \widetilde{D}_1] &= \Delta[\arg z^m; \widetilde{D}_1] \\
&\quad + \Delta[\arg q(z); \widetilde{D}_1] + \Delta[\arg(1-\delta(z)); \widetilde{D}_1] \\
&= 2m\pi + q2\pi + 0 \\
&= (m+q)2\pi,
\end{aligned}
$$

这指明 $p_m(z)$在单位圆内部有$(m+q)$个零点，定理 2.7 证毕.

利用上述定理 2.7 可以讨论 θ 方法的渐近稳定性.

定理2.8 用 θ 方法(1.2)去求解试验方程(1.1)时，方法(1.2)是 GP 稳定的，当且仅当$\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$.

这个定理的证明在以后的章节里以推论的形式给出.

§4.3 用线性多步法求解多延时量方程

考虑如下简单的多延时量微分方程：

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= ay(t) + b_1 y(t-\tau_1) \\
&\quad + b_2 y(t-\tau_2) + \cdots \\
&\quad + b_m y(t-\tau_m), \quad t \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

$$
y(t) = \varphi(t), \qquad t \leqslant 0, \tag{3.2}
$$

其中 $\varphi(t)$是已知初始函数，$a, b_j, 1 \leqslant j \leqslant m$ 为已知系数，$\tau_j > 0$，$1 \leqslant j \leqslant m$为常数延时量.

我们设法寻找(3.1)的指数形式的解 $y(t) = c \cdot e^{st}$，这里 c, S 是常数. 若(3.1)有非平凡的指数形式的解当且仅当 S 满足

$$
S - a - b_1 e^{-S\tau_1} - \cdots - b_m e^{-S\tau_m} = 0. \tag{3.3}
$$

(3.3)称为(3.1)的特征方程. 我们有如下

定义3.1 $\mathrm{DDE_s}$(3.1)被称为是渐近稳定的，当且仅当其任一解 $y(t)$满足$\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$.

定理3.1[8] 对任意的 $\tau_j>0,1\leqslant j\leqslant m$,当且仅当(3.3)之一切零点 ζ 满足 $\mathrm{Re}(\zeta)<0$ 时(3.1)为渐近稳定的.

定理3.2 倘使(3.1)之系数 $a,b_j,1\leqslant j\leqslant m$ 满足

$$\mathrm{Re}(a)<0, \tag{3.4a}$$

$$\sum_{j=1}^{m}|b_j|<-\mathrm{Re}(a) \tag{3.4b}$$

时,对一切 $\tau_j>0,1\leqslant j\leqslant m$,(3.3)之一切零点 ζ 满足 $\mathrm{Re}(\zeta)<0$.

证明 令 $\zeta=x+\mathrm{i}y$ 是(3.3)之解,即

$$x+\mathrm{i}y=a+\sum_{j=1}^{m}b_j\mathrm{e}^{-x\tau_j-\mathrm{i}y\tau_j},$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.令

$$b_j=|b_j|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_j},\quad \mathrm{i}=\sqrt{-1},\quad 1\leqslant j\leqslant m.$$

倘使 $x\geqslant 0$ 则有

$$\begin{aligned}x-\mathrm{Re}(a)&=\sum_{j=1}^{m}|b_j|\mathrm{e}^{-x\tau_j}\cos(-y\tau_j+\phi_j)\\&\leqslant\sum_{j=1}^{m}|b_j|,\end{aligned}$$

进而

$$-\mathrm{Re}(a)\leqslant\sum_{j=1}^{m}|b_j|,$$

但这与(3.4b)相违背.定理 3.2 证毕.

推论3.3 若方程(3.1)之系数 $a,b_j,1\leqslant j\leqslant m$ 满足(3.4a)~(3.4b),则对一切 $\tau_j>0,1\leqslant j\leqslant m$,(3.1)是渐近稳定的.

下面,我们考虑更一般的所谓线性多步法

$$\begin{aligned}&\alpha_0y_n+\alpha_1y_{n-1}+\cdots+\alpha_ky_{n-k}\\&\quad=h(\beta_0f_n+\beta_1f_{n-1}+\cdots+\alpha_kf_{n-k}).\end{aligned} \tag{3.5}$$

若用(3.5)去求解方程(3.1)~(3.2)得

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_jy_{n-j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j\Big[ay_{n-j}+\sum_{i=1}^{m}b_iy^h(t_{n-j}-\tau_i)\Big], \tag{3.6}$$

为了使得计算顺利进行下去,我们必须对近似值 $y^h(t_{n-j}-\tau_i)$ 进

行插值，但这里不能再用线性插值，为了保证精度，我们必须使用高次 Lagrange 内插，即

$$y^h(t_i+\varepsilon h)=\sum_{j=-r}^{s}L_j(\varepsilon)y_{i+j},$$

$$\varepsilon\in[0,1),\ i=0,1,\cdots, \tag{3.7}$$

此处

$$L_j(\varepsilon)=\prod_{\substack{k=-r\\ j\neq k}}^{s}[(\varepsilon-k)/(j-k)]. \tag{3.8}$$

如果线性多步法(3.6)之局部截断误差为 $O(h^{k+1})$，插值误差为 $O(h^{r+s})$，那末递推公式(3.6)收敛阶为 $\min\{k,r+s\}$.

用(3.7)代入(3.6)得

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n-j}=\sum_{j=0}^{k}\beta_j[\overline{a}y_{n-j}+\sum_{i=1}^{m}\overline{b}_i\sum_{p=-r}^{s}L_p(\delta_i)y_{n-l_i-j+p}], \tag{3.9}$$

此处

$$(l_j-\delta_j)h=\tau_j,\qquad 1\leqslant j\leqslant m,$$

$$0\leqslant\delta_j<1,\qquad 1\leqslant j\leqslant m,$$

$$\overline{a}=ah,$$

$$\overline{b}_j=b_jh,\qquad 1\leqslant j\leqslant m,$$

定义3.2 令 $\delta_j\in[0,1)$，$\overline{a},\overline{b}_j\in C$，$1\leqslant j\leqslant m$，于是数值方法(3.5)被称为是在点$(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m)$处是$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m)$稳定的，当且仅当用该方法去求解系数满足(3.4a)～(3.4b)的方程(3.1)～(3.2)时数值解 $y_n\to0(n\to\infty)$，此处 $l_m3\cdots3l_1\geqslant s+1$.

我们定义集合

$$S_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m}=\{(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m):\text{在点}(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m)\text{处}(3.5)\text{是}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m)\text{一稳定的}\},$$

而线性多步法(3.5)之稳定集定义为

$$S=\bigcap_{0\leqslant\delta_j<1}S_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m}.$$

如果再定义集合

$$H = \left\{(\bar{a},\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_m):\mathrm{Re}(\bar{a}) < 0,\sum_{j=1}^{m} |\bar{b}_j| < -\mathrm{Re}(\bar{a})\right\}.$$

那末下面的定义是合理的：

定义3.3[39] 线性多步法(3.5)对于$\mathrm{DDE_s}$被称为是P_m稳定的，当且仅当

$$H \subseteq S_{00\cdots0}.$$

定义3.4[39] 线性多步法(3.5)对于$\mathrm{DDE_s}$被称为是GP_m稳定的当且仅当

$$H \subseteq S.$$

为了研究(3.5)之p_m稳定性及GP_m稳定性，类似于导出(1.7)那样，我们可以导出(3.9)的特征方程

$$p_m(z) = 0,$$

其中

$$p_m(z) = Q(z)z^{l_m+r} - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z)z^{l_m-l_j}, \qquad (3.10)$$

$$Q(z) = \rho(z) - \bar{a}\sigma(z),$$

$$Q_j(z) = \bar{b}_j\gamma(z,\delta_j)\sigma(z),$$

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^{k-j},$$

$$\sigma(z) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j z^{k-j},$$

$$\gamma(z,\delta_j) = \sum_{i=-r}^{s} L_i(\delta_j)z^{i+r},$$

$$0 \leqslant \delta_j < 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

这样一来，线性多步法(3.5)，或记为$\langle\rho,\sigma\rangle$在点$(\bar{a},\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_m)$处$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m)$稳定的，当且仅当

$$p_m(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1, \qquad (3.10a)$$

$$\forall\, l_m \geqslant l_{m-1} \geqslant \cdots \geqslant l_1 \geqslant s+1.$$

为了讨论(3.5)之GP_m稳定性，我们先回忆如下引理

引理3.4 下列命题等价

$$\langle \rho, \sigma \rangle \text{ 是 A 稳定的}, \tag{3.11}$$

$$\mathrm{Re}(\overline{a}) < 0 \Rightarrow Q(z) \text{ 是 Schur 多项式}, \tag{3.12}$$

$$|z| \geqslant 1 \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}\right) \geqslant 0. \tag{3.13}$$

下面的引理可以在文献[40]中找到.

引理3.5[40] 下列命题等价

$$|\gamma(z, \delta)| \leqslant 1, \quad \text{当 } |z| = 1, \tag{3.14}$$

$$r \leqslant s \leqslant r + 2. \tag{3.15}$$

定理3.6 设 $p_m(z)$定义于(3.10).如果

$$Q(z) \text{ 是 Schur 多项式}, \tag{3.16}$$

$$\sum_{j=1}^{m} |Q_j(z)| < |Q(z)|, \quad \text{对 } |z| = 1, \tag{3.17}$$

于是 $p_m(z)$是 Schur 多项式.

证明 从条件(3.16)

$$p(z) = Q(z) z^{l_m + r} \tag{3.18}$$

也是 Schur 多项式.对$|z| = 1$,注意到 $p(z) \neq 0$,可把 $p_m(z)$改写为

$$p_m(z) = p(z)\left[1 - \sum_{j=1}^{m} \delta_j(z, \delta_j)\right],$$

其中

$$\delta_j(z, \delta_j) = p(z)^{-1} Q_j(z) z^{l_m - l_j},$$

$$\sum_{j=1}^{m} |\delta_j(z, \delta_j)| < 1, \quad \text{对 } |z| = 1.$$

命

$$C = \{z : |z| = 1\},$$

$\Delta_c \arg f(z)$表示 z 绕C 的正向一周时$f(z)$的幅角增量,那末

$$\Delta_c \arg[p_m(z)] = \Delta_c \arg[p(z)] + \Delta_c\left[1 - \sum_{j=1}^{m} \delta_j(z, \delta_j)\right],$$

因为 $\sum_{j=1}^{m} |\delta_j(z,\delta_j)| < 1$，故

$$\Delta_c \arg[1 - \sum_{j=1}^{m} \delta_j(z,\delta_j)] = 0,$$

所以

$$\Delta_c \arg[p_m(z)] = \Delta_c \arg[p(z)]. \tag{3.19}$$

由于 $p(z)$ 是 Schur 多项式，且次数与 $p_m(z)$ 相同，按照幅角原理，知 $p_m(z)$ 与 $p(z)$ 在 C 内有相同多的零点，所以 $p_m(z)$ 也是 Schur 多项式，定理 3.6 证毕.

推论3.7 若用线性多步法(3.5)去求解系数满足(3.4a)～(3.4b)的方程(3.1)～(3.2)相对应的 $p_m(z)$ 定义于(3.10)，$Q(z)$ 及 $Q_j(z)$，$1 \leqslant j \leqslant m$ 满足条件(3.16)～(3.17)，那末方法(3.5)是在点$(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m)$处是$(\delta_1\delta_2\cdots\delta_m)$稳定的.

定理3.8 如果线性多步法(3.5)，即$\langle\rho,\sigma\rangle$在点$(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m)$是$(\delta_1\delta_2\cdots\delta_m)$稳定的，那末 $Q(z)$ 必是 Schur 多项式.

证明 由于$\langle\rho,\sigma\rangle$在点$(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m)$是$(\delta_1\delta_2\cdots\delta_m)$稳定的，当且仅当

$$p_m(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1,$$
$$\text{对任意的 } l_m \geqslant l_{m-1} \geqslant \cdots \geqslant l_1 \geqslant s + 1.$$

成立. 可令

$$l_m = l_{m-1} = \cdots = l_1, \tag{3.20}$$

此时 $p_m(z)$ 可改写为

$$p_m(z) = Q(z) z^{l_m + r} - \widetilde{p}(z),$$

其中

$$\widetilde{p}(z) = Q_1(z) + Q_2(z) + \cdots + Q_m(z).$$

使用定理 2.7，$Q(z)$ 必须是 Schur 多项式.

下列定理是本章的重要结果.

定理3.9 如果 Lagrange 插值满足 $r \leqslant s \leqslant r+2$，那末线性多步法(3.5)是 GP_m 稳定的，当且仅当它是 A 稳定的.

证明 设用线性多步法(3.5)去求解系数满足条件(3.4a)~(3.4b)的试验方程(3.1)~(3.2)时它是 GP_m 稳定的,那么对满足条件(3.4a)~(3.4b)的任意点$(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m)$上它一定是$(\delta_1\delta_2\cdots\delta_m)$稳定的,按定理 3.8 对于 $\mathrm{Re}(a)<0$ 时 $Q(z)$是 Schur 多项式,即 $\rho(z)-\overline{a}\sigma(z)$是 Schur 多项式,它表示$\langle\rho,\sigma\rangle$是 A 稳定的.

设$\langle\rho,\sigma\rangle$是 A 稳定的.令$(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m)\in H$.于是当 $\mathrm{Re}(\overline{a})<0$ 时 $\rho(z)-\overline{a}\sigma(z)$是 Schur 多项式.由于 $r\leqslant s\leqslant r+2$,利用引理 3.5,我们有

$$|\gamma(z,\delta_j)|\leqslant 1,\quad 对\ \forall\ |z|=1,0\leqslant\delta_j<1.$$

对于$|z|=1$的某些 z,如果 $\sigma(z)=0$,那末 $\rho(z)\neq 0$,否则与 $Q(z)$是 Schur 多项式不符.此时(3.17)自然成立.

对$|z|=1$时的某些 z,$\sigma(z)\neq 0$,再注意到(3.13),有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}|Q_j(z)|&=\sum_{j=1}^{m}|\overline{b}_j\gamma(z,\delta_j)\sigma(z)|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{m}|\overline{b}_j|\cdot|\sigma(z)|\\&<-\mathrm{Re}(\overline{a})\,|\sigma(z)|\\&\leqslant|\rho(z)-\overline{a}\sigma(z)|.\end{aligned}$$

这表示(3.17)成立,使用定理 3.6 及推论 3.7 知(3.5)是在$(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m)$处为$(\delta_1\delta_2\cdots\delta_m)$稳定,即$(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m)\in S_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_m}$.由于$0\leqslant\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m<1$是任意的,从而$(\overline{a},\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m)\in S$.定理 3.9 证毕.

定理 3.10 如果 Lagrange 插值(3.7)满足 $r\leqslant s\leqslant r+2$, $m\geqslant 1$为自然数,则下列命题等价:

$$\langle\rho,\sigma\rangle\ 是\ A\ 稳定的,\tag{3.21a}$$

$$\langle\rho,\sigma\rangle\ 是\ p_m\ 稳定的,\tag{3.21b}$$

$$\langle\rho,\sigma\rangle\ 是\ GP_m\ 稳定的.\tag{3.21c}$$

证明 由定理 3.9(3.21a)与(3.21c)是等价的.再由定义,GP_m 稳定性$\Rightarrow P_m$ 稳定性.于是 A 稳定性$\Rightarrow GP_m$ 稳定性$\Rightarrow P_m$ 稳

定性.如果定理3.8的证明中命$\delta_1=\delta_2\cdots=\delta_m=0$,那末该定理指明$p_m$稳定性⇒$A$稳定性.定理10证毕.

推论3.11 θ方法为GP_m稳定的充要条件为$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$.

证明 在第一章第4节中我们曾指明θ方法为A稳定的充要条件为$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$,再由定理3.10便得本推论.

这个推论指明本章定理2.8的结论是正确的.

§4.4 Runge-Kutta方法的渐近稳定性

考虑如下延时微分方程:

$$U'(t)=f(t,U(t),U(t-\tau)),\qquad t\geqslant 0,\tag{4.1}$$

$$U(t)=g(t),\qquad t\leqslant 0,\tag{4.2}$$

其中$g(t)$是已知函数,$\tau>0$为常数延时量.

令(A,b,c)表示给定的Runge-Kutta方法,其中$A=(a_{ij})_{s\times s}$,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_s)^T$,$c=(c_1,c_2,\cdots,c_s)^T$,$\sum_{i=1}^{s}b_i=1$,$c_i\in[0,1]$,$1\leqslant i\leqslant s$.

我们设法用上列隐式Runge-Kutta方法来求解方程(4.1)~(4.2).为此定义

$$\begin{cases} u_n=u_{n-1}+h\sum_{j=1}^{s}b_jf(t_{n-1}+c_jh,y_j^{(n)},z_j^{(n)}),\\ y_i^{(n)}=u_{n-1}+h\sum_{j=1}^{s}a_{ij}f(t_{n-1}+c_jh,y_i^{(n)},z_j^{(n)}),\\ \qquad 1\leqslant i\leqslant s,\end{cases}\tag{4.3}$$

这里$u_n\cong U(t_n)$,$t_n=nh$;$z_j^{(n)}\cong U(t_{n-1}+c_jh-\tau)$,它的值将用在$t_k$上的已知值$u_k$,$y_i^{(k)}$的插值来表示.当$t_{n-1}+c_jh-\tau\leqslant 0$时,$z_j^{(n)}=g(t_{n-1}+c_jh-\tau)$.

为了分析方法(4.3)的数值稳定性,我用(4.3)去求解试验方程

$$
\begin{cases} U'(t) = aU(t) + b(t-\tau), & t \geqslant 0, \\ U(t) = g(t), & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{4.4}
$$

这里 $a,b \in C$,当 $k \leqslant 0$ 时 $u_k = g(kh), y_i^{(k)} = g((k-1)h + c_i h)$.
对于方程(4.4),(4.3)成为

$$
\begin{cases} u_n = u_{n-1} + h[b_1(ay_1^{(n)} + bz_1^{(n)}) + b_2(ay_2^{(n)} + bz_2^{(n)}) \\ \qquad + \cdots + b_s(ay_s^{(n)} + bz_s^{(n)})], \\ y_i^{(n)} = u_{n-1} + h[a_{i1}(ay_1^{(n)} + bz_1^{(n)}) + a_{i2}(ay_2^{(n)} + bz_2^{(n)}) \\ \qquad + \cdots + a_{is}(ay_s^{(n)} + bz_s^{(n)})], \\ \qquad i = 1,2,\cdots,s. \end{cases} \tag{4.5}
$$

如果令

$$
U_n = (u_n, y_1^{(n)}, \cdots, y_s^{(n)})^T,
$$
$$
Z_n = (z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \cdots, z_s^{(n)})^T,
$$

那末(4.5)式能写成矩阵的形式:

$$
Q_1(x)U_n = Q_0 U_{n-1} + yP_0(\overset{0}{Z}_n), n = 1,2,\cdots, \tag{4.6}
$$

其中 $x = ah, y = bh$,及

$$
Q_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & -xb^T \\ 0 & \\ \vdots & I - xA \\ 0 & \end{pmatrix},
$$

$$
Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
P_0 = \begin{pmatrix} 0 & b^T \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix},
$$

而 Z_n 看成由下面的插值过程定义

$$Z_n = \sum_{j\in J} R_j(\delta) U_{n-m+j}, \tag{4.7}$$

其中 $R_j(\delta)$是确定的矩阵值函数，$n \geq m+1$，$m \geq M$，$(m-\delta)h = \tau$，$\delta \in [0,1)$，$M = \max J + 1$.

定义4.1 Runge-Kutta 过程(4.3)被称为在点(x,y)处是 δ 稳定的，当且仅当

(i)$(I - xA)$是可逆的，

(ii)对任意给定的向量 $U_j (j \leq m)$，由关系(4.6)~(4.7)定义的向量 $U_n (n \geq m+1)$满足

$$\lim U_n = 0 ,$$

其中 $m \geq M$.

定义4.2 令

$S_\delta = \{(x,y) \in C^2$:(4.6) - (4.7) 定义的 Runge-Kutta 过程是在(x,y) 处 δ 稳定的$\}$，

$S = \bigcap_{0 \leq \delta < 1} S_\delta$,

$S^* = \{x:(x,0) \in S\}$,

$H = \{(x,y) \in C^2: |y| < -\mathrm{Re}(x)\}$,

$H^* = \{x:(x,0) \in H\}$.

若 $H \subseteq S$，就称 Runge-Kutta 方法(4.3)是 ***GP* 稳定的**，如 $H^* \subseteq S^*$，就称方法(4.3)是 A 稳定的.

在第二章第 3 节，我们曾定义 Runge-Kutta 方法的 A 稳定性，先定义

$$\varphi(x) = 1 + xb^T(I - xA)^{-1}e ,$$

那末 Runge-Kutta 方法为 A 稳定的，当且仅当对$\forall x$，$\mathrm{Re}(x) < 0$，$(I - xA)$正则且$|\varphi(x)| < 1$.

上面两个定义是一致的.对于给定的 A 稳定的 Runge-Kutta 方法(A,b,c)，我们要寻找一类对 $Z_i^{(n)}$ 的插值，使得数值过程(4.3)满足 $H \subseteq S$.

令 $r, s \geq 0$ 是给定的整数，$\tau = (m-\delta)h$，$0 \leq \delta < 1$. 我们考虑如下对 $z_i^{(n)}$ 的插值过程：

$$Z_i^{(n)} = u_i^h(t_{n-1} + c_i h - \tau), \tag{4.8}$$

$$1 \leqslant i \leqslant s, t_{n-1} + c_i h - \tau > 0, m \geqslant s + 1,$$

$$u_i^h(t_{j-1} + c_i h + \varepsilon h) = \sum_{k=-r}^{\tilde{s}} L_k(\varepsilon) y_i^{(j+k)}, \varepsilon \in [0,1), j = 0,1,\cdots$$

$$L_j(\varepsilon) = \prod_{\substack{k=-r \\ k \neq j}}^{\tilde{s}} \left(\frac{\varepsilon - k}{j - k}\right).$$

把(4.8)代入(4.6),便有

$$Q_1(x)U_n = Q_0 U_{n-1} + y\sum_{j=-r}^{\tilde{s}} L_j(\delta) P_0 U_{n-m+j}, \quad n \geqslant m+1, \tag{4.9}$$

此处 $x = ah, y = bh, m \geqslant \tilde{s} + 1$.

令 $\delta \in [0,1), (x,y) \in C^2$,那末方法(4.3)联系插值(4.8)在 (x,y) 处是 δ 稳定的当且仅当由(4.9)定义的 U_n 满足

$$(I - xA) \text{ 是可逆的}, \tag{4.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0. \tag{4.11}$$

令

$$a(z,\varepsilon) = \sum_{j=-r}^{\tilde{s}} L_j(\varepsilon) z^{j+r}, \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1,$$

$$P(z,\delta) = a(z,\delta)P_0,$$

$$Q(z,x) = -Q_0 + zQ_1(x),$$

则差分方程(4.9)的特征方程为

$$\det[z^{m+r-1}Q(z,\delta) - yP(z,\delta)] = 0.$$

于是(4.11)成立当且仅当[27]

$$\det[z^{m+r-1}Q(z,\delta) - yP(z,\delta)] = 0 \Rightarrow |z| < 1, \quad (z \in C, m \geqslant \tilde{s} + 1). \tag{4.12}$$

下面的问题是如何判别(4.10)及(4.12)是否成立.对于(4.10),我们有如下引理

引理4.1 下列命题等价

(Ⅰ)$|\varphi(x)|<1$,

(Ⅱ)$(I-xA)$可逆,$Q(z,x)$对$|z|\geqslant 1$是可逆的.

证明 先假定$(I-xA)$可逆.那末容易验证对任意$|z|\geqslant 1$,$Q(z,x)$可逆,当且仅当$\rho[Q_1(x)^{-1}Q_0]<1$.利用对$Q_1(x)^{-1}$的精确计算,能够看出$\rho[Q_1(x)^{-1}Q_0]=|\varphi(x)|$,从而(Ⅰ),(Ⅱ)是等价的.

如果$(I-xA)$不可逆,那末利用恒等式[26]

$$\varphi(x)=\frac{\det[I-xA+xeb^T]}{\det[I-xA]}$$

知$\varphi(x)$在x处有一极点,这与(Ⅰ)违背.引理4.1证毕.

在上面的证明中,我们用了一个无法证明的对Runge-Kutta方法的假设,即对$\forall x\in C$.

$$\det[I-xA]=0\Rightarrow\det[I-xA+xeb^T]\neq 0.\qquad(4.13)$$

关于(4.12),我们先写出如下定理

定理4.2 令m_0是使得$\deg\{F_m(z)\}=\deg\{z^mQ(z)\}$之最小整数,

$$F_m(z)=\det[z^mQ(z)+P(z)],$$

则对$\forall m\geqslant m_0$,$F_m(z)$是Schur多项式当且仅当

(a)当$|z|\geqslant 1$时$Q(z)$是可逆的,

$$\sup_{|z|=1}\rho[Q(z)^{-1}P(z)]\leqslant 1,$$

(b)$F_m(z)\neq 0$对于$|z|=1$,$\rho[Q(z)^{-1}p(z)]=1$,及$m\geqslant m_0$.这个定理的证明,放到本节最后.

利用上面的定理4.2,(4.3)在(x,y)是δ稳定的,当且仅当

$(I-xA)$可逆,$|z|\geqslant 1$时$Q(z,x)$可逆, (4.14a)

$|y|\sup_{|z|=1}\rho[Q(z,x)^{-1}P(z,\delta)]\leqslant 1$,

$\det[z^{m+r-1}Q(z,x)-yp(z,\delta)]\neq 0$, (4.14b)

当$|z|=1$,$m\geqslant\tilde{s}+1$,$|y|\rho[Q(z,x)^{-1}P(z,\delta)]=1$.

令

$$\Gamma=\{x\in C:|\varphi(x)|=1\},$$

$$d(x,\Gamma) = \inf_{v\in\Gamma} | x - v |,$$

$$V = \{(x,y) \in C^2 : | \varphi(x) | < 1 \text{ 及 } | y | < d(x,\Gamma)\}$$

引理4.3[14] 若(4.8)中的 Lagrange 插值满足 $r \leqslant \tilde{s} \leqslant r+2$，则

$$V \subseteq S_0 = S.$$

这个引理的证明是冗长的，可参考文献[14].

定理4.4 如果(4.13)成立，则

$$H \subseteq S \Leftrightarrow \{(A,b,c) \text{ 是 } A \text{ 稳定的}, r \leqslant \tilde{s} \leqslant r+2\}. \tag{4.15}$$

证明 设(A,b,c)是 A 稳定的，及 $r \leqslant \tilde{s} \leqslant r+2$. 令$(x,y)\in H$. 因为$(A,b,c)$是 A 稳定的，当 $\mathrm{Re}(x)<0$ 我们有$|\varphi(x)|<1$ 及$|y|<-\mathrm{Re}(x)\leqslant d(x,\Gamma)$，因为 Γ 总位于右半平面内. 因此$(x,y)\in V$，按引理 4.3，$(x,y)\in S$ 所以

$$H \subseteq S. \tag{4.16}$$

反之，设(4.16)成立，利用(4.14a)，当 $\mathrm{Re}(x)<0$ 时$(I-xA)$可逆；$|z|\geqslant 1$ 时 $Q(z,x)$可逆. 再用引理 4.1，当 $\mathrm{Re}(x)<0$ 时，$|\varphi(x)|<1$，即(A,b,c)是 A 稳定的. 关于 $r\leqslant\tilde{s}\leqslant r+2$ 的证明，看参考文献[14]. 定理 4.4 证毕.

在后面的章节中，我们经常要用到定理 4.2，它是一个十分基本的定理，我们将详细地加以证明.

定理 4.2 的证明.

假设定理 4.2 中条件(a)~(b)成立. 令

$$G_m(z) = \det[z^m Q(z)],$$

$$R_m(z) = I + Z^{-m} Q(z)^{-1} P(z),$$

$$H_m(z) = \det[R_m(z)],$$

则

$$F_m(z) = G_m(z) H_m(z).$$

对于$|z|=1$ 由条件(a)知 $Q(z)^{-1}$存在，$\rho[Q^{-1}(z)P(z)]\leqslant 1$；由条件(b)，$F_m(z)\neq 0$，从而 $H_m(z)\neq 0$.

令

$$S=\{e^{i\theta}:\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, i=\sqrt{-1}\}.$$

对于 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 定义

$$h_\alpha(z)=\det[I+\alpha z^{-m}Q(z)^{-1}P(z)].$$

因为 $\rho[Q(z)^{-1}P(z)]\leqslant 1$ 及 $H_m(z)\neq 0$(对 $|z|=1$),所以当 $|z|=1, 0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时 $h_\alpha(z)\neq 0$,所以

$$\Delta s[\arg h_\alpha(z)]=2K_\alpha\pi,$$

此处 K_α 为整数.再使用幅角公式

$$K_\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int_s |h_\alpha^1(z)/h_\alpha(z)|\mathrm{d}z,$$

积分 K_α 连续依赖于 α,故在 $[0,1]$ 上 K_α 是 α 的一致连续函数,又因为 K_α 只能取整数及 $K_0=0$,所以

$$K_1=K_0=0,$$

从而

$$\Delta_s[\arg h_1(z)]=\Delta_s[\arg H_m(z)]=0.$$

那末

$$\begin{aligned}\Delta_s[\arg F_m(z)]&=\Delta_s[\arg G_m(z)]+\Delta s[\arg H_m(z)]\\&=\Delta_s[\arg G_m(z)]+0\ .\end{aligned}$$

另外,当 $m\geqslant m_0$ 时有 $\deg\{F_m(z)\}=\deg\{G_m(z)\}$.容易看出 $G_m(z)$ 是 Schur 多项式(因为 $|z|\geqslant 1$ 时 $G_m(z)\neq 0$)使用幅角原理知,在单位圆内部 $F_m(z)$ 与 $G_m(z)$ 有同样多的零点,故 $F_m(z)$ 亦为 Schur 多项式.

相反,设 $\forall\, m\geqslant m_0$ $F_m(z)$ 是 Schur 多项式,假设 $Q(z)=(q_{ij}(z))_{d\times d}, P(z)=(p_{ij}(z))_{d\times d}$,这里 $p_{ij}(z)$ 及 $q_{ij}(z)$ 皆是 z 的多项式.令

$$T=\{t\in[0,2\pi]: Q(e^{it})\text{ 奇异}, i=\sqrt{-1}\}.$$

考虑 $t\in[0,2\pi]-T$.令

$$\lambda(t)\in\sigma[Q(e^{it})^{-1}P(e^{it})],$$

于是存在正整数 d,p,q 使得

$$\lambda_j(t) \text{ 于}[0,2\pi]-T \text{ 连续}, j=1,2,\cdots,d; \quad (4.17a)$$

$$\det[zI-Q(e^{it})^{-1}P(e^{it})]=\prod_{j=1}^{d}(z-\lambda_j(t)), \quad (4.17b)$$

$$t\in[0,2\pi]-T, z\in C;$$

$$\forall t_0\in[0,2\pi], \exists \varepsilon>0, |t-t_0|<\varepsilon \text{ 时}, \quad (4.17c)$$

$$\lambda_j(t)=\sum_{n=-q}^{\infty}C_{j,n}(\sqrt[b]{t-t_0})^n,$$

$C_{j,n}$ 与 t 无关,与 t_0 可能有关.

关于(4.17a),(4.17b)是显然的事,关于(4.17c),可参考文献[27]中关于矩阵特征值的解析扰动这一节.

使用上面 $\lambda_j(t)$ 的性质(4.17c),可以看出,对每一个 $j,1\leqslant j\leqslant d$,使得 $|\lambda_j(t)|=1$ 只有有限多个 t,因此,我们把集合 $[0,2\pi]-T$ 分割成有限多个区间之和,即

$$D_j\cup E_j=[0,2\pi]-T, \quad (4.18a)$$

$$|\lambda_j(t)|\leqslant 1, \text{当 } t\in D_j, \quad (4.18b)$$

$$|\lambda_j(t)|>1, \text{当 } t\in E_j \quad (4.18c)$$

其中 $D_j=\cup_r D_{j,r}, E_j=\cup_s E_{j,s}$ 它们是互不相交的.

从(4.17c)还能看出,可以选择一个确定的幅角函数 $\{\arg\lambda_j(t)\}$,使得当 $t_0\in T, t\uparrow t_0$ 或者 $t\downarrow t_0$ 时 $\{\arg\lambda_j(t)\}$ 极限存在,这蕴含着 $\{\arg\lambda_j(t)\}$ 有定义且是 E_j 上的有限量,即 $\Delta_{E_j}[\arg\lambda_j(t)]$ 有意义,对其他区间上也有类似的讨论.

令 $m\geqslant m_0$,从 $H_m(z)$ 的定义,(4.17b)及(4.18a)

$$\Delta_s[\arg H_m(z)]=[\arg\prod(1+e^{-imt}\lambda_j(t))]_0^{2\pi}$$

$$=\sum_j\Delta_{D_j}[\arg(1+e^{-imt}\lambda_j(t))]$$

$$+\sum_j\Delta_{E_j}[\arg(1+e^{-imt}\lambda_j(t))].$$

由(4.18b)

$$\Delta_{D_{j,r}}[1+e^{-imt}\lambda_j(t)]\leqslant\pi,$$

由(4.18c)

$$\begin{aligned}&\Delta_{E_{j,s}}[1+\mathrm{e}^{-imt}\lambda_j(t)]\\&=\Delta_{E_{j,s}}[\mathrm{e}^{-imt}\lambda_j(t)(1+\mathrm{e}^{imt}\lambda_j(t)^{-1})]\\&\leqslant -m\mid E_{j,s}\mid+\gamma,\end{aligned}$$

其中

$$\gamma=\pi+\max_{j,s}\Delta_{E_{j,s}}[\arg\lambda_j(t)].$$

联合上面两个不等式，我们有

$$\Delta_s[\arg H_m(t)]\leqslant C-m\sum_{j,s}\mid E_{j,s}\mid,\ \forall\, m\geqslant m_0 \quad (4.19)$$

其中 C 是与 m 无关的常数. 令 Z_0,Z_1,Z_2 分别表示 $G_m(z)$关于 $|z|<1,|z|=1$,及 $|z|>1$ 之零点个数. 再注意 $F_m(z)$是一个 Schur 多项式，它与 G_m 有相同的次数，例如 N 次，以及 $H_m(z)=F_m(z)/G_m(z)$. 那末

$$\begin{aligned}\Delta_s[\arg H_m(z)]&=\Delta_s[\arg F_m(z)/G_m(z)] \qquad (4.20)\\&=2\pi[N-Z_0-\frac{1}{2}Z_1]\\&=2\pi[\frac{1}{2}Z_1+Z_2],\end{aligned}$$

其中 N 与 m 有关，但 $G_m(z)=\det[z^mQ(z)]$在 S 上及 S 外之零点数显然与 m 无关，. 联合(4.19)及(4.20)

$$m\sum_{j,s}\mid E_{j,s}\mid+2\pi[\frac{1}{2}Z_1+Z_2]\leqslant C\ ,$$

令 $m\to\infty$便得 $\sum_{j,s}\mid E_{j,s}\mid=0 \ \Rightarrow\ E_{j,s}=\phi$.

由(4.18a,b)推出

$$\mid\lambda_j(t)\mid\leqslant 1,\quad \forall\, t\in[0,2\pi]-T. \qquad (4.21)$$

令 $m\geqslant m_0$，由 $H_m(z)$之定义及(4.21)知$|H_m(z)|\leqslant 2^d$ 对任意 $z\in S$, $Q(z)^{-1}$存在时成立. 从而 $H_m(z)$在 s 上无极点. 当 $z\in s$ 时，$F_m(z)\neq 0$, $H_m(z)$无极点，而 $F_m=H_m\cdot G_m$ 推知 $G_m(z)\neq 0$，即 $\det[z^mQ(z)]\neq 0$，从而 $T=\phi$. 换句话说(4.21)成立于$[0,2\pi]$,

$$|\lambda_j(t)|\leqslant 1 \quad \forall t\in[0,2\pi],$$

即

$$\sup_{|z|=1}\rho[Q(z)^{-1}p(z)]\leqslant 1.$$

至此我们已经证明

$$\begin{aligned}
&Q(z)^{-1}\text{ 存在}, && \text{对 } |z|=1,\\
&\rho[Q(z)^{-1}p(z)]\leqslant 1, && \text{对 } |z|=1,\\
&H_m(z)\neq 0, && \text{对 } |z|=1.
\end{aligned}$$

在充分性的证明中已证，当 $H_m(z)\neq 0$ 时

$$\Delta_s[\arg H_m(z)]=0,$$

再注意(4.20)，有

$$2\pi[\frac{1}{2}Z_1+Z_2]=0,$$

推知 $Z_2=0$. 所以对任意 $|z|\geqslant 1$, $Q(z)^{-1}$存在. 至此条件(a)~(b)全部成立. 定理 4.2 证毕.

§4.5　块 θ 方法的渐近稳定性

我们用块 θ 方法(参考第三章§3.7)

$$Z_{s+1}=Z_s+\theta hBF(Z_{s+1})+(1-\theta)hBF(Z_s), \tag{5.1}$$

去解试验方程

$$\begin{aligned}
&y'(t)=ay(t)+by(t-\tau), && t\geqslant 0,\\
&y(t)=\varphi(t), && t\leqslant 0,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $|b|<-\mathrm{Re}(a)$. 得差分方程

$$\begin{aligned}
(I-\theta xB)Z_{s+1}=&(I+(1-\theta)xB)Z_s+\theta yBZ_{s+1-m}\\
&+(1-\theta)yBZ_{s-m},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $x=ah$, $y=bh$, $mh=\tau$, $m\geqslant 1$.

类似于§4.1，如果对于满足条件 $|b|<-\mathrm{Re}(a)$ 之方程(5.1)的数值解 y_n 都满足

$$\lim_{n\to\infty}y_n=0$$

那末我们就说块 θ 方法是 **P 稳定的**. 以后将会看到这个定义与

§4.1 中的定义 1.1 是一致的. 为了考察 Z_s 之渐近性态,我们令 $Z_s = z^s \cdot \xi$,其中 $\xi \in C^k$ 是待定向量. 代入(5.3)得

$$\{(I - \theta xB)z^{s+1} - (I + (1-\theta)xB)z^s - \theta yBz^{s-m+1} - (1-\theta)yBz^{s-m}\} \cdot \xi = 0 ,$$

约去公因子 z^{s-m} 得

$$\{(I - \theta xB)z^{m+1} - (I + (1-\theta)xB)z^m - \theta yBz - (1-\theta)yB\}\xi = 0,$$

上列方程有非零解 $\xi \neq 0$,当且仅当

$$\det[(I - \theta xB)z^{m+1} - (I + (1-\theta)Bx)z^m - \theta yBz - (1-\theta)yB] = 0.$$

显然

$$Z_s \to 0(s \to \infty) \Leftrightarrow |z| < 1.$$

那末(5.1)是 P 稳定的,当且仅当

$$\det[(I - \theta xB)z^{m+1} - (I + (1-\theta)xB)z^m - \theta yBz - (1-\theta)yB] = 0 \Rightarrow |z| < 1.$$

换句话说,我们要分析

$$P_m(z) = \det[(I - \theta)xBz^{m+1} - (I + (1-\theta)xB)z^m - \theta yBz - (1-\theta)yB], \tag{5.4}$$

什么情况下它是 Schur 多项式.

如果令

$$T^{-1}BT = J = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, \cdots, J_l\},$$

是 B 的 Jordan 标准型,那末

$$\begin{aligned} p_m(z) &= \det[(I - x\theta J)z^{m+1} - (1 + (1-\theta)xJ)z^m - \theta yJz - (1-\theta)yJ] \\ &= \prod_{\mu \in \sigma[B]} [(I - \theta x\mu)z^{m+1} - (1 + (1-\theta)x\mu)z^m - \theta y\mu z - (1-\theta)y\mu] . \end{aligned}$$

那末,$p_m(z)$是 Schur 多项式,当且仅当上式每个因子

$$p(z;\theta,x,y,\mu) = (1 - \theta x\mu)z^{m+1} \tag{5.5}$$

$$- (1 + (1 - \theta)x\mu)z^m - \theta y\mu z - (1 - \theta)y\mu$$

对 $\forall \mu \in \sigma[B]$ 是 Schur 多项式.

定理 5.1 方法(5.1)是 P 稳定的,当且仅当对 $\forall (x, y) \in C^2$, $|y| < -\mathrm{Re}(x)$,及 $\forall \mu \in \sigma[B]$, $p(z;\theta, x, y, \mu)$ 是 Schur 多项式.

在第三章 §3.7,我们知道 $\sigma[B] = \{k\}$,我们来验证当 $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$ 时 $p(z;\theta, x, y, \mu)$ 是 Schur 多项式. 根据第四章 §4.2 定理 2.3, $p(z;\theta, x, y, \mu)$ 是 Schur 多项式当且仅当

$$\left| \frac{1 + (1 - \theta)x\mu}{1 - \theta x\mu} \right| < 1, \tag{5.6a}$$

$$|\mu\theta yz + (1 - \theta)y\mu| \leqslant |(1 - \theta x\mu)z - (1 + (1 - \theta)x\mu)|, \quad \text{当 } |z| = 1, \tag{5.6b}$$

$$p(z;\theta, x, y, \mu) \neq 0, \text{当 } |z| = 1, m \geqslant 1. \tag{5.6c}$$

考虑如下线性变换

$$w = \frac{z - 1}{\mu(1 - \theta + \theta z)},$$

它把单位圆 $|z| = 1$ 映射为 w 平面上的一个广义园盘 D_μ. 容易验证当 $|z| = 1, \mu > 0$ 时 $\mathrm{Re}(w) > 0$,故 D_μ 位于右半平面. 又(5.6b)等价于

$$|y| \leqslant |w - x|, \qquad \text{当 } w \in D_\mu.$$

由于 $|y| < -\mathrm{Re}(x)$,当 $w \in D_\mu$ 时显然有 $|y| < |w - x|$. 这表示(5.6b)有严格不等号,此时(5.6c)显然成立. 至于(5.6a)当且仅当 $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$ 时成立.

定理5.2 当 $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$ 时,块 θ 方法(5.1)是 P 稳定的.

§4.6 变系数线性延时方程的数值处理

考虑如下变系数线性延时方程

$$y'(t)=a(t)y(t)+b(t)y(t-\tau),t\geqslant 0, \tag{6.1}$$
$$y(t)=\varphi(t), \qquad t\leqslant 0. \tag{6.2}$$

其中 $\varphi(t)$为已知函数,$\mathrm{Re}(a(t))<0,|b(t)|\leqslant-\mathrm{Re}(a(t))$.

对于方程(6.1)~(6.2)解的性质,我们有如下定理

定理6.1 考虑如下初值问题

$$y'(t)=a(t)y(t)+f(t), \tag{6.3}$$
$$y(t_0)=y_0, \tag{6.4}$$

此处 $y,a,f:[t_0,\infty)\to C,\mathrm{Re}(a(t))<0$ 对 $\forall t\geqslant t_0$. 于是初值问题(6.3)~(6.4)满足

$$|y(t)|\leqslant\max\{|y_0|,\max_{t_0\leqslant x\leqslant t}|f(x)/[-\mathrm{Re}(a(x))]|\}. \tag{6.5}$$

证明 令 $A(t)=\int_{t_0}^{t}a(x)\mathrm{d}x$. 则(6.3)~(6.4)之解为

$$y(t)=\mathrm{e}^{A(t)}[y_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-A(x)}f(x)\mathrm{d}x].$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(A(x))}f(x)\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\left|\int_{t_0}^{t}[-\mathrm{Re}(a(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(A(x))}f(x)/(-\mathrm{Re}(a(x))]\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\max_{t_0\leqslant x\leqslant t}\{|f(x)/(-\mathrm{Re}(a(x)))|\}\\
&\left|\int_{t_0}^{t}-\mathrm{Re}(a(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(A(x))}\mathrm{d}x\right|\\
=&\max_{t_0\leqslant x\leqslant t}\{|f(x)/(-\mathrm{Re}(a(x)))|\}|\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(A(t))}-1|.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
|y(t)|\leqslant&\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(A(t))}|y_0|+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(A(t))})\\
&\max_{t_0\leqslant x\leqslant t}|f(x)/(-\mathrm{Re}(a(x)))|.
\end{aligned}$$

所以对任意的 $t\geqslant t_0$,有

$$|y(t)|\leqslant\max\{|y_0|,\max_{t_0\leqslant x\leqslant t}|f(x)/(-\mathrm{Re}(a(x)))|\}.$$

定理 6.1 证毕.

如果我们先在区间$[0,\tau]$上解(6.1)～(6.2)

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t-\tau), & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ y(t) = \varphi(t), & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

(6.6)此时能改写为

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t)\varphi(t-\tau), \\ y(0) = \varphi(0). \end{cases}$$

按照定理 6.1,我们有$(0\leqslant t\leqslant \tau)$

$$|y(t)| \leqslant \max\{|\varphi(0)|, \max_{0\leqslant x\leqslant t} |\varphi(x-\tau)b(x)/(-\mathrm{Re}(a(x)))|\},$$

注意到条件$|b(t)|\leqslant -\mathrm{Re}(a(t))$,我们有

$$|y(t) \leqslant | \max_{-\tau\leqslant t\leqslant 0} |\varphi(t)|, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{6.7}$$

继续使用定理 6.1 便得

$$|y(t)| \leqslant \max_{-\tau\leqslant t\leqslant 0} |\varphi(t)|, \quad 0 \leqslant t. \tag{6.8}$$

因此对于延时方程

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t-\tau), t \geqslant 0, \tag{6.1}$$

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \leqslant 0, \tag{6.2}$$

满足条件

$$\mathrm{Re}(a(t)) < 0, \quad t \geqslant 0, \tag{6.9}$$

$$|b(t)| \leqslant -\mathrm{Re}(a(t)), t \geqslant 0, \tag{6.10}$$

那末其解有界,其界由(6.8)给出.

类似 *AN* 稳定性,我们也有

定义6.1 一个数值方法用来解 $\mathrm{DDE_s}$ 被称为是 *PN* 稳定的,如果该方法去解系数满足条件(6.9)～(6.10)的线性方程(6.1)～(6.2)时,其数值解 y_n 满足

$$|y_n| \leqslant \max_{t\leqslant 0} |\varphi(t)|, \tag{6.11}$$

其中 $n\geqslant 0, h=\tau/m, m$ 是某正整数.

定义6.2 一个数值方法用来解 $\mathrm{DDE_s}$ 时被称为是 *GPN* 稳定的,如果该方法去解系数满足条件(6.9)～(6.10)的线性方程

(6.1)~(6.2)时,其数值解 y_n 对任意 $h>0$ 及 $n\geqslant 0$ 满足

$$|y_n|\leqslant \max_{t\leqslant 0}|\varphi(t)|. \tag{6.12}$$

对于方程

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t),y(t-\tau)), & t\geqslant 0, \\ y(t)=\varphi(t), & t\leqslant 0, \end{cases} \tag{6.13}$$

一般的所谓单点配置法可表示为

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_n+\theta h,(1-\theta)y_n+\theta y_{n+1},\ (1-\theta)y_{n-m}+\theta y_{n+1-m}), \tag{6.14}$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$, $mh=\tau$, m 是某正整数.

用单点配置法(6.14)去求解常系数线性方程(1.1)或者(4.4)时,其差分格式与 θ 方法产生的格式一致,因此,当 $\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$ 时单点配置法(6.14)是 P 稳定及 GP 稳定的.但下面的讨论表明,只有当 $\theta=1$ 时才保证是 PN 稳定的.

我们用(6.14)去求解(6.1)~(6.2),我们得差分方程:

$$y_{n+1}=y_n+a_n[\theta y_{n+1}+(1-\theta)y_n]+b_n[\theta y_{n+1-m}+(1-\theta)y_{n-m}]. \tag{6.15}$$

这里 $a_n=ha(t_n+\theta h)$, $b_n=hb(t_n+\theta h)$.

方程(6.15)成为

$$y_{n+1}=\frac{1+a_n(1-\theta)}{1-a_n\theta}y_n+\frac{b_n}{1-a_n\theta}[\theta y_{n+1-m}+(1-\theta)y_{n-m}].$$

令 $\alpha_n=-a_n$, $\beta_n=b_n$ 上式变为

$$y_{n+1}=\frac{1-\alpha_n(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta}y_n+\frac{\beta_n}{1+\alpha_n\theta}[\theta y_{n+1-m}+(1-\theta)y_{n-m}].$$

倘使

$$\left|\frac{1-\alpha_n(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta}\right|+\left|\frac{\beta_n\theta}{1+\alpha_n\theta}\right|+\left|\frac{\beta_n(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta}\right|\leqslant 1, \tag{6.16}$$

那末方法(6.14)是稳定的.

我们先假定

$$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1, \tag{6.17}$$

$$h|b(t)|(1-\theta)|\leqslant 1. \tag{6.18}$$

分两种情况讨论(6.16):

(i)$0\leqslant\alpha_n(1-\theta)\leqslant 1$,我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1-\alpha_n(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta}\right|+\left|\frac{\beta_n\theta}{1+\alpha_n\theta}\right|+\left|\frac{\beta_n(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta}\right| \\
&=\frac{1-\alpha_n(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta}+\frac{|\beta_n|\theta}{1+\alpha_n\theta}+\frac{|\beta_n|(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta} \\
&\leqslant\frac{1-\alpha_n(1-\theta)+\alpha_n\theta+\alpha_n(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta} \\
&=1 .
\end{aligned}$$

(ii)$\alpha_n(1-\theta)>1$,此时

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1-\alpha_n(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta}\right|+\left|\frac{\beta_n\theta}{1+\alpha_n\theta}\right|+\left|\frac{\beta_n(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta}\right| \\
&=\frac{\alpha_n(1-\theta)-1+|\beta_n|\theta+|\beta_n|(1-\theta)}{1+\alpha_n\theta} \\
&=\frac{\alpha_n-\alpha_n\theta-1+|\beta_n|}{1+\alpha_n\theta} \\
&=\frac{\alpha_n+|\beta_n|}{1+\alpha_n\theta}-1 \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

我们来指明最后一个不等式.事实上,从条件(6.18)知$|\beta_n|(1-\theta)\leqslant 1$,所以$|\beta_n|(2-2\theta)\leqslant 2$,即$|\beta_n|(1+1-2\theta)\leqslant 2$,$|\beta_n|\leqslant 2+|\beta_n|(-1+2\theta)$.今$|\beta_n|\leqslant\alpha_n$,$\theta\geqslant\frac{1}{2}$,因此$|\beta_n|\leqslant 2+\alpha_n(-1+2\theta)$,$\alpha_n(1-2\theta)\leqslant 2-|\beta_n|$,即$\alpha_n+|\beta_n|\leqslant 2+2\alpha_n\theta$.从而

$$\frac{\alpha_n+|\beta_n|}{1+\alpha_n\theta}\leqslant 2.$$

因此在我们的强制条件(6.17)~(6.18)下单点配制法是 PN 稳定的.特别注意的是当 $\theta=1$ 时条件(6.18)自然成立,此时方法(6.14)便是向后 Euler 公式,它总是 PN 稳定的.

下面我们来考察(6.1)~(6.2)的理论解及数值解的渐近性

质,J.K.Hale[10,pp108,129]曾讨论如下方程

$$y'(t)=\sigma(t)y(t)+\gamma(t)y(t-\tau),t\geqslant 0,$$
$$y(t)=\varphi(t),\qquad t\leqslant 0,$$

解的渐近性质,指明当

$$\sigma(t)\leqslant -\delta<0, \tag{6.19}$$
$$\gamma(t)^2<\delta(-\delta-2\sigma(t)), \tag{6.20}$$

上列方程的解是渐近稳定的,即$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$.但是条件(6.20)对$\gamma(t)$是十分严格的限制,因为当$\sigma(t)$是有界连续函数,$\delta\sim 0$时导致$\gamma(t)\sim 0$.下面我们给出一个较为宽松且便于应用的条件.

先给出如下引理

引理6.2 设非负函数$\widetilde{Y}(t)$满足

$$\widetilde{Y}'(t)=\sigma(t)\widetilde{Y}(t)+\gamma(t)\widetilde{Y}(t-\tau),t\geqslant 0, \tag{6.21}$$
$$\widetilde{Y}(t)=\varphi(t),\qquad t\leqslant 0, \tag{6.22}$$

其中$\varphi(t)\geqslant 0,\gamma(t)\geqslant 0,\sigma(t)<0$为已知函数,且

$$\gamma(t)\leqslant -q\sigma(t),0\leqslant q<1,\forall t\geqslant 0, \tag{6.23}$$
$$\sigma(t)\leqslant -\beta<0,\forall t\geqslant 0, \tag{6.24}$$

而$\tau>0$为常数延时量.则

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{Y}(t)=0.$$

证明 令$t\in[0,\tau]$,则

$$\widetilde{Y}'(t)=\sigma(t)\widetilde{Y}(t)+\gamma(t)\varphi(t-\tau),$$
$$\widetilde{Y}(0)=\varphi(0).$$

上面初值问题的解为

$$\widetilde{Y}(t)=e^{\Sigma_0(t)}\varphi(0)+e^{\Sigma_0(t)}\int_0^t e^{-\Sigma_0(s)}\gamma(s)\varphi(s-\tau)ds,$$

其中

$$\Sigma_i(t)=\int_{i\tau}^t\sigma(s)ds,t\in[i\tau,(i+1)\tau],i=0,1,2,\cdots.$$

注意到

$$\gamma(t)/(-\sigma(t)) \leqslant q \text{ 及} [\mathrm{e}^{-\Sigma_0(t)}]' = -\sigma(t)\mathrm{e}^{-\Sigma_0(t)},$$

我们有

$$\widetilde{Y}(t) \leqslant M\{\mathrm{e}^{\Sigma_0(t)} + q(1 - \mathrm{e}^{\Sigma_0(t)})\},$$

其中 $M = \max\limits_{-\tau\leqslant t\leqslant 0} \varphi(t)$.

再注意到 $0\leqslant q<1$ 及 $\Sigma_0(t) = \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}s \leqslant -\beta t$，得

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}(t) &\leqslant M\{\mathrm{e}^{-\beta t} + q(1 - \mathrm{e}^{-\beta t})\}\\ &:= MG_0(t).\end{aligned}$$

令 $t\in[\tau,2\tau]$，则

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}'(t) &= \sigma(t)\widetilde{Y}(t) + \gamma(t)\widetilde{Y}(t-\tau),\\ \widetilde{Y}(\tau) &= \widetilde{Y}(\tau).\end{aligned}$$

上列初值问题的解满足

$$\widetilde{Y}(t) \leqslant \mathrm{e}^{\Sigma_1(t)}G_0(\tau)M + \mathrm{e}^{\Sigma_1(t)}\int_\tau^t \mathrm{e}^{-\Sigma_1(s)}\gamma(s)G_0(s-\tau)M\mathrm{d}s.$$

使用第一积分中值定理可得

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}(t) &\leqslant \mathrm{e}^{\Sigma_1(t)}G_0(\tau)M + qG_0(\zeta_0)\{1 - \mathrm{e}^{\Sigma_1(t)}\}M\\ &\leqslant \mathrm{e}^{\Sigma_1(t)}G_0(\tau)M + qM\{1 - \mathrm{e}^{\Sigma_1(t)}\}, 0 \leqslant \zeta_0 \leqslant \tau.\end{aligned}$$

容易验证 $q<G_0(\tau)$，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}(t) &\leqslant \{\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}G_0(\tau) + q[1 - \mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}]\}M\\ &:= G_1(t-\tau)M.\end{aligned}$$

再令 $t\in[2\tau,3\tau]$，类似地有

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}(t) &\leqslant \mathrm{e}^{\Sigma_2(t)}G_1(\tau)M + \mathrm{e}^{\Sigma_2(t)}\int_{2\tau}^{3\tau} \mathrm{e}^{-\Sigma_2(s)}\gamma(s)G_1(s-2\tau)M\mathrm{d}s\\ &\leqslant \{\mathrm{e}^{\Sigma_2(t)}G_1(\tau) + qG_1(\zeta_1)[1 - \mathrm{e}^{\Sigma_2(t)}]\}M,\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant\zeta_1\leqslant\tau$.

再注意到 $G_1(\tau)<G_0(\tau)=G_1(0)$，我们有

$$\widetilde{Y}(t) \leqslant MG_0(\tau)\{\mathrm{e}^{\Sigma_2(t)} + q[1 - \mathrm{e}^{\Sigma_2(t)}]\}$$

$$\leqslant MG_0(\tau)\{e^{-\beta(t-2\tau)} + q[1 - e^{-\beta(t-2\tau)}]\}$$
$$= MG_0(\tau)G_0(t-2\tau).$$

令 $t \in [3\tau, 4\tau]$，可得

$$\widetilde{Y}(t) \leqslant e^{\sum_3(t)} G_i(\tau) G_0(\tau) M$$
$$+ e^{\sum_3(t)} \int_{3\tau}^{t} e^{-\sum_3(s)} \gamma(s) G_0(\tau) G_0(s - 3\tau) M \mathrm{d}s$$
$$\leqslant \{e^{\sum_3(t)} G_0(t) + qG_0(\zeta_2)[1 - e^{\sum_3(t)}]\} G_0(\tau) M$$
$$\leqslant G_0(\tau) M \{e^{-\beta(t-3\tau)} G_0(\tau) + q[1 - e^{-\beta(t-3\tau)}]\}$$
$$= G_0(\tau) M G_1(t - 3\tau).$$

当 $t \in [4\tau, 5\tau]$ 时，类似地可得

$$\widetilde{Y}(t) \leqslant G_0(\tau)^2 M G_0(t - 4\tau).$$

当 $t \in [5\tau, 6\tau]$ 时可得

$$\widetilde{Y}(t) \leqslant G_0(\tau)^2 M G_1(t - 5\tau).$$

进而用归纳法可以证明

$$\widetilde{Y}(t) \leqslant G_0(\tau)^k G_0(t - 2k\tau) M, \quad 2k\tau \leqslant t \leqslant (2k+1)\tau, \tag{6.25}$$

$$\widetilde{Y}(t) \leqslant G_0(\tau)^k G_1(t - (2k+1)\tau) M, \quad (2k+1)\tau \leqslant t \leqslant (2k+2)\tau, \quad k = 0, 1, 2\cdots. \tag{6.26}$$

注意到 $0 < G_0(\tau) < 1$，便有

$$\lim_{t \to \infty} \widetilde{Y}(t) = 0.$$

引理 6.2 证毕.

下面我们将考虑方程(6.1)～(6.2)的数值解，假定其系数 $a(t)$，$b(t)$ 满足条件(6.23)～(6.24)．即

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t-\tau), \quad t \geqslant 0, \tag{6.27}$$
$$y(t) = \varphi(t), \quad t \leqslant 0, \tag{6.28}$$
$$|b(t)| \leqslant -q\mathrm{Re}(a(t)), \quad t \geqslant 0, \tag{6.29}$$

$$\mathrm{Re}(a(t)) \leqslant -\beta < 0, \qquad t \geqslant 0. \quad (6.30)$$

类似于引理6.2的证明方法，可以指明，(6.27)～(6.30)之任一解 $y(t) \to 0 (t \to \infty)$. 按照这一点，我们也希望它们的数值解 y_n 也需满足 $y_n \to 0, n \to \infty$.

定义6.3 一个数值方法用于求解非自治的延时问题被称为渐近稳定的，倘使用此方法求解(6.27)～(6.30)时，其数解 $\{y_n\}$ 对任意 $h>0$ 满足

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 0,$$

其中 $(m-\delta)h = \tau, 0 \leqslant \delta < 1, t_n = nh, y_n \sim y(t_n)$.

考虑用最简单的 θ 方法去求解(6.27)～(6.30)

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n &+ h\theta[a(t_{n+1})y_{n+1} + b(t_{n+1})y_{n+1-m+\delta}] \\ &+ h(1-\theta)[a(t_n)y_n + b(t_n)y_{n-m+\delta}]. \end{aligned} \quad (6.31)$$

不在网格上的值采用线性插值

$$y_{n+1-m+\delta} = \delta y_{n+2-m} + (1-\delta)y_{n+1-m}, \quad (6.32)$$

$$y_{n-m+\delta} = \delta y_{n+1-m} + (1-\delta)y_{n-m}. \quad (6.33)$$

代入(6.31)得递推关系

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n &+ h\theta[a(t_{n+1})y_{n+1} + b(t_{n+1})(\delta y_{n+2-m} \\ &+ (1-\delta)y_{n+1-m})] + h(1-\theta)[a(t_n)y_n \\ &+ b(t_n)(\delta y_{n+1-m} + (1-\delta)y_{n-m})]. \end{aligned} \quad (6.34)$$

定理6.3 θ 方法是渐近稳定的，当且仅当 $\theta = 1$.

证明 $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}$. 对常系数的试验方程

$$\begin{aligned} y'(t) &= ay(t) + by(t-\tau), \quad & t \geqslant 0, \\ y(t) &= \varphi(t), & t \leqslant 0, \end{aligned}$$

其中系数 a, b 满足条件

$$\mathrm{Re}(a) < 0, \quad (6.35)$$

$$|b| < -\mathrm{Re}(a), \quad (6.36)$$

条件(6.35)～(6.36)蕴含着条件(6.29)～(6.30). 本章第2节定理2.8指明 θ 方法是 GP 稳定的，当且仅当 $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$. 因此，当

$0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}$时不可能是渐近稳定的.

当$\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1$.考虑如下特殊方程:

$$y'(t) = -a(t)y(t) - \theta a(t)y(t-\tau), t \geqslant 0, \quad (6.37)$$

$$y(t) = \varphi(t), \qquad t \leqslant 0, \quad (6.38)$$

此处 $a(t) \geqslant (1-\theta)/4$. 显然上列方程之系数满足条件(6.29)~(6.30).

求解时,我们令 $h = \tau, \delta = 0$,于是(6.34)导致

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \theta[a(t_{n+1})y_{n+1} + b(t_{n+1})y_n] \\ &\quad + (1-\theta)[a(t_n)y_n + b(t_n)y_{n-1}], \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1-(1-\theta)a(t_n) - \theta^2 a(t_{n+1})}{1+\theta a(t_{n+1})} y_n \\ &\quad - \frac{\theta(1-\theta)a(t_n)}{1+\theta a(t_{n+1})} y_{n-1}, \end{aligned}$$

其中 $h = \tau = 1$.

下面我们选择序列$\{a(t_n)\}$对 n 来说具有周期性,即

$$a(t_0) = a(t_2) = \cdots = a(t_{2k}) = \cdots = e = \frac{1-\theta}{4},$$

$$a(t_1) = a(t_3) = \cdots = a(t_{2k+1}) = \cdots = f = \frac{4}{1-\theta}.$$

令

$$Y_k = (y_k, y_{k-1})^T.$$

于是(6.39)能写成

$$Y_{n+1} = A_n Y_n, \quad n \geqslant 0,$$

其中

$$A_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1-(1-\theta)a(t_n) - \theta^2 a(t_{n+1})}{1+\theta a(t_{n+1})} & \dfrac{-\theta(1-\theta)a(t_n)}{1+\theta a(t_{n+1})} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $n = 0$,则 $a(t_0) = e, a(t_1) = f$ 及

$$A_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{1-(1-\theta)e-\theta^2 f}{1+\theta f} & \dfrac{-\theta(1-\theta)e}{1+\theta f} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1-(1-\theta)f-\theta^2 e}{1+\theta e} & \dfrac{-\theta(1-\theta)f}{1+\theta e} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = A_1 A_0 = \begin{bmatrix} c_1 d_1 + c_2 & c_1 d_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = A_1 Y_1 = A_1 A_0 Y_0 = BY_0.$$

利用 $a(t_n)$之周期性,可得

$$Y_{n+2} = BY_n, \qquad n = 0,1,2,\cdots.$$

那末 $Y_n \to 0(n\to\infty)$当且仅当 B 的谱半径$\rho[B]<1$.可以验证 $\rho[B]>1$(参看文献[41])从而当$\frac{1}{2}\leqslant\theta<1$ 时不可能是渐近稳定的.

当 $\theta=1, n=0$,有

$$y_1 = \frac{1}{1-ha(t_1)}y_0 + \frac{hb(t_1)}{1-ha(t_1)}(\delta y_{-m+2} + (1-\delta)y_{-m+1}).$$

因为

$$\left|\frac{1-qh\operatorname{Re}(a(t))}{1-h\operatorname{Re}(a(t))}\right| \leqslant \frac{1+qh\beta}{1+h\beta} := p < 1.$$

因此

$$|y_1| \leqslant p \cdot \max_{-\tau\leqslant t\leqslant 0} |\varphi(t)|.$$

使用归纳法能够证明对一切 $n\leqslant m-1$,有

$$|y_n| \leqslant p \cdot \max_{-\tau\leqslant t\leqslant 0} |\varphi(t)|.$$

对 $n=m$,我们有

$$|y_{m+1}| \leqslant \left|\frac{1}{1-ha(t_{m+1})}\right| |y_m| + \left|\frac{hb(t_{m+1})}{1-ha(t_{m+1})}\right| |\delta y_2 + (1-\delta)y_1|$$

$$\leqslant p \cdot \max_{-\tau\leqslant t\leqslant 0} |\varphi(t)| \cdot \left|\frac{1 - hq\mathrm{Re}(a(t_{m+1}))}{1 - h\mathrm{Re}(a(t_{m+1}))}\right|$$

$$\leqslant p^2 \cdot \max_{-\tau\leqslant t\leqslant 0} |\varphi(t)|.$$

对一切 $n\geqslant m$，我们归纳地导出

$$|y_{n+1}| \leqslant p^{n-m+2} \max_{-\tau\leqslant t\leqslant 0} |\varphi(t)|.$$

因此 $y_n\to 0$ 当 $n\to\infty$. 定理 6.3 证毕.

§4.7 数值方法的 *PL* 稳定性

考虑如下试验方程：

$$y'(t) = ay(t) + by(t-\tau), t\geqslant 0, \tag{7.1}$$

$$y(t) = \varphi(t), \quad t\leqslant 0, \tag{7.2}$$

其中 a,b 为复数，$\tau>0$ 为延时量，$\varphi(t)$为已知函数.

研究(7.1)的指数形式的解 $y(t)=c\cdot e^{\zeta t}$，其中 c 为待定常数. 代入(7.1)得其特征方程

$$\zeta - a - be^{-\zeta\tau} = 0. \tag{7.3}$$

在第四章§4.3 曾经指明，如果方程(7.3)的一切零点有负的实部，那末(7.1)之任一解 $y(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

另外对(2.1)的指数形式的解 $y(t)=c\cdot e^{\zeta t}$，还满足

$$\frac{y(t+h)}{y(t)} = e^{\zeta h},$$

及

$$\lim_{\mathrm{Re}(\zeta)\to-\infty} \frac{y(t+h)}{y(t)} = 0, \quad t\geqslant 0.$$

根据这一点，我们也有理由要求一个数值方法去解方程(7.1)～(7.2)时，其数值解$\{y_n\}$满足

$$\lim_{\mathrm{Re}(\zeta)\to-\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 0$$

对任意的自然数 $n\geqslant 0$ 成立.

我们首先要研究的问题是方程(7.1)之系数要满足什么条件

才能使得(2.3)的零点 ζ 满足 $\mathrm{Re}(\zeta)\to-\infty$.

引理7.1 设(7.1)之系数 a,b 满足 $\mathrm{Im}(a)\neq 0$,则(2.3)之零点 ζ 满足 $\mathrm{Re}(\zeta)<0$ 当且仅当

(i) $\mathrm{Re}(a)<0$,

(ii) $|b|<-\mathrm{Re}(a)$.

这个引理我们在下一章中以推论的形式给出.

除了条件(i)~(ii)成立外,我们还假定

(P) $\lim\limits_{\mathrm{Re}(a)\to-\infty}\dfrac{|b|}{\mathrm{Re}(a)}=0.$

引理7.2 设(7.1)之系数 a,b 满足(i)~(ii)及(P),那末(7.3)之一切零点 ζ 满足

$$\lim_{\mathrm{Re}(a)\to-\infty}\mathrm{Re}(\zeta)=-\infty. \tag{7.4}$$

证明 令(7.3)之任一零点 $\zeta=x+\mathrm{i}y$.则

$$\left|\frac{\zeta}{a}-1\right|=\left|\frac{b}{a}\mathrm{e}^{-\zeta\tau}\right|,$$

或

$$\left|\frac{\zeta}{a}-1\right|=\left|\frac{b}{a}\right|\mathrm{e}^{-x\tau}.$$

如果当 $\mathrm{Re}(a)\to-\infty$ 时,x 并不趋于 $-\infty$,则考虑两个序列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$,它们满足条件(i)~(ii)及(P),对应(7.3)的零点为 $\zeta_n=x_n+\mathrm{i}y_n$,且 $n\to\infty$ 时($\mathrm{Re}(a_n)\to-\infty$)$x_n$ 并不以 $-\infty$ 为极限.此时 $\{x_n\}$ 中有一子序列 $\{x_{n_k}\}$,仍然记为 $\{x_n\}$,使得 $x_n\geqslant-\gamma$,对任意 $n\geqslant 1$ 成立,这里 $\gamma>0$ 为某常数.那末

$$\frac{|b_n|}{|a_n|}=\mathrm{e}^{x_n\tau}\left|\frac{\zeta_n}{a_n}-1\right|\geqslant\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\left|\frac{\zeta_n}{a_n}-1\right|.$$

由于 $\mathrm{Re}(a_n)\to-\infty$ 时,$\mathrm{Re}(\zeta_n)=x_n$ 不以 $-\infty$ 为极限,故上式右端当 $n\to\infty$ 时不趋于零.但这与 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 之假设矛盾.引理 7.2 证毕.

定义7.1 一个数值方法被称为是 *PL* 稳定的,当且仅当用它去求解系数满足条件(i)~(ii)的方程(7.1)~(7.2)时其数值解 $y_n\to 0$($n\to\infty$),以及用它去求解系数满足(i)~(ii)及(P)时,数值

解 y_n 满足

$$\lim_{\mathrm{Re}(a)\to-\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=0,\quad \forall n\geqslant 0, \tag{7.5}$$

这里 $t_n=nh$，$mh=\tau$，m 为自然数.

注1 如果在定义 7.1 中，(7.5)式对任意步长 $h>0$ 成立，那末我们称此方法为 *GPL* 稳定的.

下面我们将给出块 θ 方法为 PL 稳定的充分必要条件. 为此考虑块 θ 方法(参考本章 §4.5)去求解(7.1)~(7.2)，

$$\begin{aligned} Z_{s+1}&=Z_s+h\theta B[aZ_{s+1}+bZ_{s+1-m}] \\ &\quad+h(1-\theta)B[aZ_s+bZ_{s-m}], \end{aligned} \tag{7.6}$$

令 $Z_s=z^s\cdot\zeta$，$\zeta\in C^k$ 代入上式，便得此差分方程的特征方程

$$\begin{aligned} p_m(z)=\det[&(I-\theta\overline{a}B)z^{m+1}-(I+(1-\theta)\overline{a}B)z^m \\ &-\theta\overline{b}Bz-(1-\theta)\overline{b}B]=0, \end{aligned} \tag{7.7}$$

显然

$$\lim_{s\to\infty}Z_s=0\Leftrightarrow p_m(z)=0\Rightarrow|z|<1,$$

以及

$$\lim_{\mathrm{Re}(a)\to-\infty}\frac{\|Z_{s+1}\|}{\|Z_s\|}=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} p_m(z)=0\Rightarrow \\ \lim\limits_{\mathrm{Re}(a)\to-\infty}z=0 \end{matrix}\right\}.$$

换言之

$$\text{块 }\theta\text{ 方法是 }PL\text{ 稳定的}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} p_m(z)=0\Rightarrow \\ \lim\limits_{\mathrm{Re}(a)\to-\infty}z=0 \end{matrix}\right\}.$$

我们知道

$$\begin{aligned} p_m(z)=\prod_{\mu\in\sigma[B]}[&(1-\theta\overline{a}\mu)z^{m+1}-(1+(1-\theta)\overline{a}\mu)z^m \\ &-\theta\overline{b}\mu z-(1-\theta)\overline{b}\mu], \end{aligned}$$

所以我们仅需考虑多项式

$$\begin{aligned} p(z;\theta,\overline{a},\overline{b},\mu)=&(1-\theta\overline{a}\mu)z^{m+1}-(1+(1-\theta)\overline{a}\mu)z^m \\ &-\theta\overline{b}\mu z-(1-\theta)\overline{b}\mu \end{aligned}$$

零点 z 的性质. 我们把 $p(z;\theta,\overline{a},\overline{b},\mu)$ 改写为

$$\tilde{p}(z;\theta,\bar{a},\bar{b},\mu)=z^{m+1}-\frac{1+(1-\theta)\bar{a}\mu}{1-\theta\bar{a}\mu}z^{m}$$
$$-\frac{(\theta z+(1-\theta))\bar{b}\mu}{1-\theta\bar{a}\mu}.$$

我们必须研究在什么情况下 $\tilde{p}(z;\theta,\bar{a},\bar{b},\mu)$之零点 z 满足

$$\lim_{\mathrm{Re}(a)\to-\infty} z=0.$$

令 $\theta=1$.则

$$\tilde{p}(z;\theta,\bar{a},\bar{b},\mu)=z^{m+1}-\frac{1+(1-\theta)\bar{a}\mu}{1-\theta\bar{a}\mu}z^{m}$$
$$-\frac{(\theta z+(1-\theta))\bar{b}\mu}{1-\theta\bar{a}\mu}$$
$$=z^{m+1}-\frac{1}{1-\bar{a}\mu}z^{m}-\frac{\bar{b}\mu}{1-\bar{a}\mu}z.$$

置

$$\frac{1}{1-\bar{a}\mu}=\varepsilon,\quad \frac{\bar{b}\mu}{1-\bar{a}\mu}=f(\varepsilon),$$

则当 $\mathrm{Re}(a)\to-\infty$时 $\varepsilon\to0$ 及 $f(\varepsilon)\to0$,

$$\tilde{p}(z;\theta,\bar{a},\bar{b},\mu)=0\Leftrightarrow$$
$$z^{m+1}=\varepsilon z^{m}+f(\varepsilon)z. \tag{7.8}$$

按照多项式零点的位置的定理,如果 z 是上列方程的零点,则

$$|z|\leqslant\max\{|\varepsilon|,|f(\varepsilon)|\}+1.$$

从而当 $\mathrm{Re}(a)\to-\infty$时,多项式 $\tilde{p}(z;\theta,\bar{a},\bar{b},\mu)$之零点 z 只能为有界量,说$|z|\leqslant k$.那末从(7.7)得

$$|z|^{m+1}\leqslant|\varepsilon|k^{m}+|f(\varepsilon)|k\to0,(\mathrm{Re}(a)\to-\infty). \tag{7.9}$$

由此可知当 $\theta=1$ 时块 θ 方法(7.6)是 PL 稳定的.

令$\frac{1}{2}\leqslant\theta<1$.把方程 $\tilde{p}(z;\theta,\bar{a},\bar{b},\mu)=0$ 改写为

$$z^{m+1}=\frac{\left[\frac{1}{\bar{a}\mu}+(1-\theta)\right]}{\left[\frac{1}{\bar{a}\mu}-\theta\right]}z^{m}+\frac{[\theta z+(1-\theta)]\bar{b}\mu}{\left[\frac{1}{\bar{a}\mu}-\theta\right]\bar{a}\mu}, \tag{7.10}$$

置

$$\varepsilon = \frac{1}{a\mu}, \qquad g(\varepsilon) = \frac{\bar{b}\mu}{\bar{a}\mu},$$

则当 $\mathrm{Re}(a) \to -\infty$ 时，$\varepsilon \to 0$ 及 $g(\varepsilon) \to 0$. (7.10)成为

$$z^{m+1} = \frac{[\varepsilon + (1-\theta)]}{[\varepsilon - \theta]} z^m + \frac{[\theta z + (1-\theta)]}{[\varepsilon - \theta]} g(\varepsilon).$$

因多项式之零点连续依赖于其系数，那末

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z(\varepsilon)^{m+1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{[\varepsilon + (1-\theta)]}{[\varepsilon - \theta]} z(\varepsilon)^m + \frac{[\theta z + (1-\theta)]}{[\varepsilon - \theta]} g(\varepsilon) \right\},$$

得

$$z(0)^{m+1} = \frac{(1-\theta)}{-\theta} z(0)^m,$$

上列方程有一零点 $z = (\theta - 1)/\theta \neq 0$. 故当 $\mathrm{Re}|a| \to -\infty$ 时方程(7.10)有一零点 $z(\varepsilon)$ 不趋于零.

定理7.2 块 θ 方法(7.6)是 PL 稳定的，当且仅当 $\theta = 1$.

注1 只要适当引进某种插值，便可讨论块 θ 方法的 GPL 稳定性.

§4.8 隐式 Runge-Kutta 方法的 *GPL* 稳定性

在上一节，我们曾讨论了块 θ 方法的 PL 稳定性，结论是块 θ 方法为 PL 稳定的充分必要条件为 $\theta = 1$. 对于常微分方程初值问题

$$U'(t) = f[t, U(t)], \tag{8.1a}$$

$$U(t_0) = U_0, \tag{8.1b}$$

我们考虑如下隐式 Runge-Kutta 方法：

$$K_{n,i} = hf\left(t_n + c_i h, u_n + \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} K_{n,j}\right), i = 1 \sim \nu, \tag{8.2a}$$

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{i=1}^{\nu} b_i K_{n,i}, \quad n \geqslant 0, \tag{8.2b}$$

这里 $\sum_{i=1}^{\nu} b_i = 1$, $C_i = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}$, $u_n \sim U(t_n)$, $t_n = t_o + nh$, $h > 0$ 是给定的步长. 有时，我们也简单地用矩阵的记号来表示方法(8.2)

$$
\begin{array}{c|c}
C & A \\
\hline
 & b^T
\end{array}
\tag{8.3}
$$
,

其中 $A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}, b=(b_1,b_2,\cdots,b_\nu)^T, C=(c_1,c_2,\cdots,c_\nu)^T$. 为检验方法(8.2)对于求解 ODEs 时的 L 稳定性,我们常用(8.2)去求解试验方程

$$
\begin{aligned}
U'(t) &= \lambda U(t), \mathrm{Re}(\lambda) < 0, \\
U(t_0) &= U_0,
\end{aligned}
$$

可得如下递推关系(见第二章§2.2)

$$
u_{n+1} = r(\bar{h})u_n, n \geqslant 0,
$$

这里 $u_n \sim U(t_n)$, $\bar{h} = \lambda h$, 以及

$$
r(\bar{h}) = 1 + \bar{h} b^T (I - \bar{h} A)^{-1} e,
$$

这里 $e=(1,1,\cdots,1)^T$.

定义 8.1 设 $R(q)$是 q 的函数, q 为复变量.

(Ⅰ)倘使对任意的 $\mathrm{Re}(q)<0 \Rightarrow |R(q)|<1$, 于是称 $R(q)$是 A 可接受的.

(Ⅱ)倘使 $R(q)$是 A 可接受的,而且

$$
\lim_{\mathrm{Re}(q)\to\infty} R(q) = 0,
$$
于是称 $R(q)$ 是 L 可接受的.

为了讨论 IRK 方法(8.2),求解延时微分方程初值问题

$$
\begin{aligned}
U'(t) &= f(t, U(t), U(t-\tau)), \quad & t \geqslant 0, \tau > 0, \\
U(t) &= \varphi(t), & t \leqslant 0
\end{aligned}
$$

的数值稳定性,与前面一样,我们用(8.2)去求解如下试验方程:

$$
U'(t) = aU(t) + bU(t-\tau), \quad t \geqslant 0, \tau > 0, \tag{8.4}
$$
$$
U(t) = \varphi(t), \quad t \leqslant 0, \tag{8.5}
$$

其中系数 a, b 满足如下条件(见本章§4.7)

$$
|b| < -\mathrm{Re}(a), \tag{8.6a}
$$
$$
\lim_{\mathrm{Re}(a)\to-\infty} \frac{|b|}{\mathrm{Re}(a)} = 0. \tag{8.6b}
$$

可以得到如下差分方程:

$$K_{n,i} = ha\left(u_n + \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}K_{n,j}\right)$$

$$+ hb\left(u_{n-m+\delta} + \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}K_{n-m+\delta,j}\right), i = 1 \sim \nu, \quad (8.7a)$$

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{i=1}^{\nu} b_i K_{n,i}, \quad n = 0,1,\cdots, \quad (8.7b)$$

其中

$\tau = (m - \delta)h, 0 \leqslant \delta < 1, u_{n-m+\delta}$ 及 $K_{n-m+\delta,j}(1 \leqslant j \leqslant \nu)$

用 Lagrange 插值来表示，它们定义为

$$u_{n-m+\delta} = \sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta) u_{n-m+p}, \quad (8.8a)$$

$$K_{n-m+\delta,j} = \sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta) K_{n-m+p,j}, 1 \leqslant j \leqslant \nu, \quad (8.8b)$$

$$L_p(\delta) = \prod_{\substack{k=-r \\ k \neq P}}^{S} \left(\frac{\delta - k}{p - k}\right). \quad (8.8c)$$

$$m \geqslant S + 1. \quad (8.8d)$$

方程(8.7)，联合插值(8.8)可用向量的形式来表示

$$\boldsymbol{K}_n = \bar{a} u_n e + \bar{a} A \boldsymbol{K}_n + \bar{b}\left(\sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta) u_{n-m+p}\right) e$$

$$+ \bar{b} A\left(\sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta) \boldsymbol{K}_{n-m+p}\right), \quad (8.9)$$

$$u_{n+1} = u_n + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{K}_n, \quad (8.10)$$

其中

$$\boldsymbol{K}_n = (K_{n,1}, K_{n,2}, \cdots, K_{n,\nu})^T,$$

$$e = (1,1,\cdots,1)^T,$$

$$\bar{a} = ah,$$

$$\bar{b} = bh.$$

可把(8.9)～(8.10)写成矩阵的形式

$$
\begin{pmatrix} I-\bar{a}A & 0 \\ -\boldsymbol{b}^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{a}e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}
+ \begin{pmatrix} \bar{b}A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta)\boldsymbol{K}_{n-m+p} \\ \sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta)u_{n-m+p+1} \end{pmatrix}
+ \begin{pmatrix} 0 & \bar{b}e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta)\boldsymbol{K}_{n-m-1+p} \\ \sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta)u_{n-m+p} \end{pmatrix}. \tag{8.11}
$$

为了得到差分方程(8.11)的特征方程,令

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = z^n \cdot \xi, \xi \in C^{\nu+1},
$$

代人(8.11),且假定有非平凡解($\xi\neq0$)得

$$
\det\left\{\begin{pmatrix} I-\bar{a}A & 0 \\ -\boldsymbol{b}^T & 1 \end{pmatrix}z^{m+1} - \begin{pmatrix} 0 & \bar{a}e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}z^m - \begin{pmatrix} -\bar{b}A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta)z^{p+1} - \begin{pmatrix} 0 & \bar{b}e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta)z^p\right\} = 0.
$$

把上面的特征方程记为

$$
p_m(\bar{a}, \bar{b}, \delta, z) = \det\begin{Bmatrix} T_1(z) & T_2(z) \\ T_3(z) & T_4(z) \end{Bmatrix} = 0, \tag{8.12}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
T_1(z) &= (I-\bar{a}A)z^{m+1} - \bar{b}A\sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta)z^{p+1} \\
&= \left[I - \left(\bar{a} + \bar{b}\sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta)z^{-m+p}\right)A\right]z^{m+1}, \\
T_2(z) &= -\bar{a}ez^m - \bar{b}e\sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta)z^p, \\
T_3(z) &= -\boldsymbol{b}^T z^{m+1}, \\
T_4(z) &= z^{m+1} - z^m.
\end{aligned}
$$

如果 $\det\{T_1(z)\}\neq0$,那末方程(8.12)等价于

$$\det\{T_1(z)\}\det\{T_4(z) - T_3(z)T_1(z)^{-1}T_2(z)\} = 0, \tag{8.13}$$

(见甘特马赫:矩阵论,上册).于是(8.12)变为

$$T_4(z) - T_3(z)T_1(z)^{-1}T_2(z)$$

$$= z^{m+1} - z^m - b^T\Big[z^{m+1}\Big(I - A\Big(\bar{a} + \bar{b}\sum_{p=-r}^{S}L_p(\delta)\Big)z^{-m+p}\Big)\Big]^{-1}$$

$$\cdot z^{m+1} \cdot z^m\Big(\bar{a} + \bar{b}\sum_{p=-r}^{S}L_p(\delta)z^{-m+p}\Big)e = 0.$$

定义

$$q(z) = \bar{a} + \bar{b}\sum_{p=-r}^{S}L_p(\delta)z^{-m+p}, \tag{8.14}$$

于是方程(8.12)的非零根 z 满足

$$z = r(q(z)). \tag{8.15}$$

定义 8.2 (见本章§4.7)一个数值方法被称为 PL 稳定的,当且仅当该方法求解系数满足条件(8.6a)~(8.6b)之方程(8.4)~(8.5)时它是 P 稳定的(见第四章§4.1)并且其数值解$\{u_n\}$满足

$$\lim_{h\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0, \tag{8.16}$$

其中 $u_n \sim U(t_n), t_n = nh, mh = \tau$.

定义 8.3 如果定义 8.2 中的(8.16)式对任何 $h>0$ 成立,那么称此方法是 GPL 稳定的.

我们回忆了 PL 稳定性及 GPL 稳定性的概念后,那么下面的陈述是显然的事.

(a)方法 IRK(8.2)是 A 稳定的$\Leftrightarrow r(\bar{h})$是 A 可接受的;

(b)方法 IRK(8.2)是 L 稳定的$\Leftrightarrow r(\bar{h})$是 L 可接受的;

(c)方法 IRK(8.2)是 GP 稳定的$\Leftrightarrow p_m(\bar{a}, \bar{b}, \delta, z) = 0 \Rightarrow |z|<1$;

(d)方法 IRK(8.2)是 GPL 稳定的$\Leftrightarrow p_m(\bar{a}, \bar{b}, \delta, z) = 0 \Rightarrow |z|<1$ 及 $\lim_{\mathrm{Re}(a)\to-\infty}|z| = 0$.

引理 8.1 令

$$r(z,\delta)=\sum_{p=-r}^{S}L_p(\delta)z^{p+r},$$

于是$|r(z,\delta)|\leqslant 1(|z|=1)$当且仅当,$r\leqslant S\leqslant r+2$.对于更详细的情况,可参阅第四章引理 3.5.

定理 8.1 隐式 Runge-Kutta 方法(8.2),如果使用的插值满足 $r\leqslant S\leqslant r+2$ 及 $m\geqslant S+1$,那么它是 GPL 稳定的充分必要条件为它是 L 稳定的.

证明 设方法(8.2)是 L 稳定的,我们首先证明它是 GP 稳定的.按照陈述(c)只需证明

$$p_m(\bar{a},\bar{b},\delta,z)=0\Rightarrow|z|<1.$$

令

$$R(z,\delta)=\sum_{p=-r}^{S}L_p(\delta)z^{-m+p},$$

则

$$|R(z,\delta)|=|r(z,\delta)||z^{-m-r}|\leqslant 1,\quad(|z|=1),$$

注意到 $m\geqslant S+1$ 及 $R(\infty,\delta)=0$,应用解析函数的最大模原理得

$$|R(z,\delta)|\leqslant 1\qquad\qquad\forall\ |z|\geqslant 1.$$

于是

$$\left|\bar{b}\sum_{p=-r}^{S}L_p(\delta)z^{-m+p}\right|\leqslant|\bar{b}|<-\mathrm{Re}(a).$$

注意 $q(z)$的定义,我们有

$$\mathrm{Re}[q(z)]<0$$

对一切$|z|\geqslant 1$ 以及 $0\leqslant\delta<1$ 成立.

假设 $p_m(\bar{a},\bar{b},\delta,z)$有某个零点 $\tilde{z}$,$|\tilde{z}|\geqslant 1$,于是因为方法(8.2)是 A 稳定的,故 $r(q)$是 A 可接受的,令 $\mathrm{Re}(q(\tilde{z}))<0$,导致 $\det\{T_1(\tilde{z})\}\neq 0$.按(8.15)有

$$\tilde{z}=r[q(\tilde{z})],$$

及

$$|\tilde{z}|=|r(q(\tilde{z}))|<1,$$

这与假设矛盾.

我们再来指明方法(8.2)是 GPL 稳定的. 这只需证明 $p_m(\bar{a}, \bar{b}, \delta, z)=0 \Rightarrow \lim\limits_{\mathrm{Re}(a)\to-\infty} z=0$. 假设 $p_m(\bar{a}, \bar{b}, \delta, z)$之某个零点 $\hat{z}$ 当 $\mathrm{Re}(a)\to-\infty$ 时它不趋于零. 于是至少存在一个序列 $\{\bar{a}_n\}, \{\bar{b}_n\}, \{\hat{z}_n\}$, 它们满足 $p_m(\bar{a}_n, \bar{b}_n, \delta, \hat{z}_n)=0$, 且当 $|\bar{b}_n|/\mathrm{Re}(\bar{a}_n)\to 0(n\to\infty)$时 $|\hat{z}_n|\geqslant\sigma>0$ 对一切 $n\geqslant N$ 成立. 我们不妨假设 $0<\sigma<1$. 令

$$\alpha_n = \frac{\bar{b}_n}{\mathrm{Re}(\bar{a}_n)}\sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta) z^{-m+p}.$$

于是存在某个正数 $M>0$, 使得

$$|\alpha_n| \leqslant \left|\frac{\bar{b}_n}{\mathrm{Re}(\bar{a}_n)}\right| M\sigma^{-m-r} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

这导致对充分大的 n

$$\bar{a}_n + \bar{b}_n \sum_{p=-r}^{S} L_p(\delta)\hat{z}^{-m+p} = \bar{a}_n + \alpha_n \mathrm{Re}(\bar{a}_n). \tag{8.16}$$

其实部小于零, 即 $\mathrm{Re}(q(\hat{z}_n))<0$, 再次导致对充分大的 n, 有 $\det\{T_1(\hat{z}_n)\}\neq 0$. 再从(8.15)式得

$$\hat{z}_n = r(q(\hat{z}_n)), \tag{8.17}$$

注意到 $\alpha_n\to 0(n\to\infty)$及(8.16)式有

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(q(\hat{z}_n)) = -\infty. \tag{8.18}$$

从(8.17),(8.18)及陈述(b), 我们得

$$\lim_{n\to\infty}\hat{z}_n = \lim_{n\to\infty} r(q(\hat{z}_n)) = 0,$$

但这与 $|\hat{z}_n|\geqslant\sigma>0(n\geqslant N)$是矛盾的. 这便完成了定理 8.1 之证明.

第五章　线性延时系统的数值处理

§5.1　渐近稳定的充分条件

对于线性延时系统

$$y'(t) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \leqslant 0, \tag{1.2}$$

其中 $A=(a_{ij})_{N\times N}, B=(b_{ij})_{N\times N}$是已知常数矩阵，$\tau>0$ 是常数延时量，$\phi(t)$为已知向量函数，$y(t)=(y_1(t), y_2(t), \cdots, y_N(t))^T$为未知向量函数，我们有如下定义

定义 1.1　如果(1.1)的任一解 $y(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0,$$

我们就称此系统为**渐近稳定的**.

为了研究(1.1)为渐近稳定的条件，令 $y(t)=e^{\zeta t}\cdot\xi$ 为(1.1)的指数形式的解，其中 $\xi\in C^N$ 是待定向量. 将它代入(1.1)式，得

$$(\zeta I - A - Be^{-\zeta\tau})\xi = 0. \tag{1.3}$$

(1.3)有非零解的充分必要条件为

$$\det(\zeta I - A - Be^{-\zeta\tau}) = 0. \tag{1.4}$$

方程(1.4)称为(1.1)的**特征方程**. 从文献[8]我们还有

定理 1.1　下列命题是等价的：

对于任意的 $\tau>0$，(1.1)的一切解 $y(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \tag{1.5}$$

$$\det(\zeta I - A - Be^{-\zeta\tau}) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\zeta) < 0, \text{对任意的 } \tau > 0 \text{ 成立}. \tag{1.6}$$

有了这个定理，我们仅需考虑，在什么条件下，(1.4)的零点 ζ 有负实部.

定理 1.2　设特征方程中的 A、B 满足

(i) $\eta(A)=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A+A^*)<0$,

(ii) $\|B\|<-\eta(A)$,

则对一切 $\tau>0$,(1.4)的一切零点 ζ 有负实部.

证明 令 $\zeta=x+\mathrm{i}y$ 是(1.4)的任一零点,$A=H_1+\mathrm{i}H_2$ 其中

$$H_1=\frac{1}{2}(A+A^*),H_2=\frac{1}{2\mathrm{i}}(A-A^*),$$

它们都是 Hermite 矩阵.(1.4)成立当且仅当存在向量 $\xi\neq0$ 使得

$$[\zeta I-A-B\mathrm{e}^{-\zeta\tau}]\xi=0. \tag{1.7}$$

不妨设$\langle\xi,\xi\rangle=\|\xi\|^2=1$,在(1.7)两边与 ξ 作内积,得

$$\zeta\langle\xi,\xi\rangle-\langle A\xi,\xi\rangle-\langle B\xi,\xi\rangle\mathrm{e}^{-\zeta\tau}=0,$$

即

$$x+\mathrm{i}y-\langle H_1\xi,\xi\rangle-\mathrm{i}\langle H_2\xi,\xi\rangle=\langle B\xi,\xi\rangle\mathrm{e}^{-\zeta\tau}.$$

令

$$\langle B\xi,\xi\rangle=|\langle B\xi,\xi\rangle|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\quad \mathrm{i}=\sqrt{-1},$$

于是

$$x-\langle H_1\xi,\xi\rangle=|\langle B\xi,\xi\rangle|\cos(\varphi-y\tau)\cdot\mathrm{e}^{-x\tau}.$$

则

$$x-\langle H_1\xi,\xi\rangle\leqslant\|B\|\mathrm{e}^{-\tau x}.$$

根据 Hermite 矩阵的特征值的极值性质,

$$x-\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A+A^*)\leqslant\|B\|\mathrm{e}^{-\tau x}.$$

倘 $x\geqslant0$,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A+A^*)&\leqslant x-\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A+A^*)\\&\leqslant\|B\|\mathrm{e}^{-\tau x}\\&\leqslant\|B\|.\end{aligned}$$

但这与条件(i)~(ii)是违背的.定理 1.2 证毕.

推论 1.3 如果方程(1.1)之系数 A,B 满足条件(i)~(ii),

那么(1.1)是渐近稳定的.

定理 1.2 的结果容易推广到多延时量的方程,如

$$
\begin{aligned}
y'(t) = & Ay(t) + B_1(y)(t-\tau_1) + B_2y(t-\tau_2) + \cdots \\
& + B_my(t-\tau_m), \qquad t \geqslant 0, \\
& y(t) = \phi(t), \qquad t \leqslant 0,
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& A = (a_{ij})_{N\times N}, B = (b_{ij})_{N\times N}, 0 < \tau_j \leqslant \tau, 1 \leqslant j \leqslant m, \\
& y(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_N(t))^T, \\
& y(t-\tau_i) = (y_1(t-\tau_i), y_2(t-\tau_i), \cdots, y_N(t-\tau_i))^T, \\
& \qquad\qquad 1 \leqslant i \leqslant m.
\end{aligned}
$$

容易导出(1.7)之特征方程:

$$
\det\left[\zeta I - A - \sum_{j=1}^{m} B_j e^{-\zeta\tau_j}\right] = 0. \tag{1.9}
$$

类似地有,(1.7)是渐近稳定的,当且仅当,(1.9)的一切零点有负的实部,用类似于证明定理 1.2 的方法可证明

定理 1.4 对任意正整数 m⩾1,如果

(i)′ $\eta(A) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(A + A^*) < 0$,

(ii)′ $\sum_{j=1}^{m} \| B_j \| < -\eta(A)$,

则方程(1.9)对任意 $0 < \tau_j \leqslant \tau, 1 \leqslant j \leqslant m$,其所有零点 ζ 满足 $\mathrm{Re}(\zeta) < 0$,从而(1.7)是渐近稳定的.

定理 1.2 的另一种推广是考虑如下系统

$$
y'(t) = Ay(t) + By(t_\tau) \quad t \geqslant 0, \tag{1.10}
$$

$$
y(t) = \phi(t) \qquad t \leqslant 0, \tag{1.11}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& y(t_\tau) = [y_1(t-\tau_1), y_2(t-\tau_2), \cdots, y_N(t-\tau_N)]^T, \\
& \qquad\qquad 0 < \tau_j \leqslant \tau, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.
\end{aligned}
$$

令 $y(t) = e^{\zeta t}.\xi, \xi \in C^N$,那末

$$y(t_\tau) = e^{\zeta t}\operatorname{diag}\{e^{-\zeta\tau_1}, e^{-\zeta\tau_2}, \cdots, e^{-\zeta\tau_N}\}\xi.$$

容易导出(1.10)之特征方程,为

$$\det[\zeta I - A - Be^{-\zeta T}] = 0, \tag{1.12}$$

其中

$$e^{-\zeta T} = \operatorname{diag}\{e^{-\zeta\tau_1}, e^{-\zeta\tau_2}, \cdots, e^{-\zeta\tau_N}\}.$$

再用类似于定理 1.2 的证明方法可得

定理 1.5 设系统(1.10)之系数 A, B 满足条件(i)~(ii),那末方程(1.12)的一切零点有负的实部.

对于给定的矩阵 A, B,条件(i)~(ii)简洁明了,有时也有实用意义,验证也较方便.但是这个条件是否太强了呢,回答是肯定的,文献[30]中曾考虑如下特例

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_1 y_1(t) + b_1 y_2(t - \tau_2), & t \geqslant 0, \\ y_2'(t) = a_2 y_2(t) + b_2 y_1(t - \tau_1), \end{cases} \tag{1.13}$$

曾指明,当

$$\operatorname{Re}(a_i) < 0, \qquad i = 1,2, \tag{1.14}$$

$$| b_1 b_2 | < \operatorname{Re}(a_1)\operatorname{Re}(a_2), \tag{1.15}$$

特征方程(1.12)之零点 ζ 有负的实部,其中

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

此时特征方程(1.12)变为

$$G(\zeta) = \zeta^2 - (a_1 + a_2)\zeta + a_1 a_2 - b_1 b_2 e^{-\zeta d} = 0,$$

其中 $d = \tau_1 + \tau_2$.令

$$b_1 b_2 = | b_1 b_2 | e^{i\phi}, \zeta = x + iy, d = \tau_1 + \tau_2.$$

我们有

$$[x - \operatorname{Re}(a_1)][x - \operatorname{Re}(a_2)] - [y - \operatorname{Im}(a_1)(y - \operatorname{Im}(a_2)]$$
$$= | b_1 b_2 | e^{-dx}\cos(\phi - dy), \tag{1.16}$$
$$[x - \operatorname{Re}(a_2)][y - \operatorname{Im}(a_1)] + [(x - \operatorname{Re}(a_1)][y - \operatorname{Im}(a_2)]$$
$$= | b_1 b_2 | e^{-dx}\sin(\phi - dy). \tag{1.17}$$

把上述方程(1.16)～(1.17)看成变量$(x-\mathrm{Re}(a_1))$, $(y-\mathrm{Im}(a_1))$的线性方程组，用 Cramer 法则求之

$$x-\mathrm{Re}(a_1)=\frac{|b_1b_2|}{|\zeta-a_2|^2}\mathrm{e}^{-xd}[(x-\mathrm{Re}(a_2))\cos(\phi-dy)+(y-\mathrm{Im}(a_2))\sin(\phi-dy)].$$

利用 Cauchy-Schwatz 不等式

$$[x-\mathrm{Re}(a_2)]\cos(\phi-dy)+[y-\mathrm{Im}(a_2)]\sin(\phi-dy)$$
$$\leqslant\{[x-\mathrm{Re}(a_2)]^2+[y-\mathrm{Im}(a_2)]^2\}^{1/2}=|\zeta-a_2|,$$

因此

$$x-\mathrm{Re}(a_1)\leqslant\frac{|b_1b_2|}{|\zeta-a_2|}\mathrm{e}^{-dx}.$$

类似地

$$x-\mathrm{Re}(a_2)\leqslant\frac{|b_1b_2|}{|\zeta-a_1|}\mathrm{e}^{-dx}.$$

若$x\geqslant0$，令上面两式相乘，再注意 ζ 是 $G(\zeta)$ 之零点，则有 $|\zeta-a_1|\cdot|\zeta-a_2|=|b_1b_2|\mathrm{e}^{-dx}$. 从而

$$\begin{aligned}|b_1b_2|&<\mathrm{Re}(a_1)\mathrm{Re}(a_2)\\&\leqslant[x-\mathrm{Re}(a_1)][x-\mathrm{Re}(a_2)]\\&\leqslant|b_1b_2|\mathrm{e}^{-dx}\\&\leqslant|b_1b_2|,\end{aligned}$$

这是不可能的，从而 $x<0$.

容易验证条件(1.14)～(1.15)较之相应的条件(i)～(ii)弱. 有趣的是，在 1993 年 in't hout 给出了系统(1.1)为渐近稳定的充分必要条件，我们在下一节给出.

§5.2 一个充分必要条件

这一节，我们首先给出系统(1.1)为渐近稳定的充分必要条件，然后研究用 θ 方法求解时的稳定性问题.

定理 2.1 下列命题等价

$$\begin{cases}\text{对任一 } \tau > 0, (1.1) \text{ 的任一精确解 } y(t) \text{ 满足} \\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0,\end{cases} \tag{2.1}$$

$$\det[\zeta I - A - Be^{-\zeta\tau}] = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\zeta) < 0, (\forall \tau > 0), \tag{2.2}$$

$$\begin{cases}\lambda \in \sigma[A] \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda) < 0, \\ \rho[(\zeta I - A)^{-1}B] < 1, \quad (\forall \mathrm{Re}(\zeta) = 0, \zeta \neq 0), \\ -1 \overline{\in} \sigma[A^{-1}B].\end{cases} \tag{2.3}$$

证明 根据定理 1.1,陈述(2.1)与(2.2)是等价的.我们仅需指明(2.2)与(2.3)等价即可,为此令

$$S_\theta^* = \left\{\zeta : \zeta \in C, \left|\frac{1 + (1-\theta)\zeta}{1 - \theta\zeta}\right| < 1\right\},$$

$$\Gamma_\theta = \left\{\zeta : \zeta \in C, \left|\frac{1 + (1-\theta)\zeta}{1 - \theta\zeta}\right| = 1\right\}.$$

假设(2.3)成立,我们要推出(2.2)成立.

因为 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$,所以 $\sigma[A] \subseteq S_{\frac{1}{2}}^*$.那末当 $\zeta \overline{\in} S_{\frac{1}{2}}^*$ 时,$(\zeta I - A)^{-1}B$ 的特征值是 ζ 的代数函数,再注意到 $\rho[(\zeta I - A)^{-1}B] \to 0$ 当 $\zeta \to \infty$,于是利用无界区域的最大模原理知

$$\rho[(\zeta I - A)^{-1}B] \leqslant \sup_{\zeta \in \Gamma_{\frac{1}{2}}} [(\zeta I - A)^{-1}B], \quad \forall \zeta \overline{\in} S_{\frac{1}{2}}^*.$$

所以

$$\rho[(\zeta I - A)^{-1}B] \leqslant 1, \quad \text{当 } \mathrm{Re}(\zeta) > 0. \tag{2.4}$$

注意到 $\forall \mathrm{Re}(\zeta) \geqslant 0$ 时有

$$\det[\zeta I - A - e^{-\zeta\tau}B] = 0 \Leftrightarrow e^{\zeta\tau} \in \sigma[(\zeta I - A)^{-1}B]. \tag{2.5}$$

如果

$$\det[\zeta I - A - e^{-\zeta\tau}B] = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\zeta) \geqslant 0,$$

那末利用(2.5)式,将导致(2.3)及(2.4)式不能成立,从而(2.2)式成立.

假设(2.2)成立,我们来推出(2.3)成立.我们首先证明,如果 $\lambda \in \sigma[A]$,则 $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$.

设有某 $\lambda \in \sigma[A]$,$\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.令 Σ 是以 λ 为中心的正向圆周,当 $\zeta \in \Sigma$ 时,$\mathrm{Re}(\zeta) > 0$ 及 $(\zeta I - A)^{-1}$ 存在.设 f 是复值函数,

在Σ上不为零，且连续．用$[\arg f(\zeta)]_\Sigma$表示当 ζ 绕Σ一周时，$f(\zeta)$的幅角增量．因为Σ是封闭的曲线，故 $[\arg f(\zeta)]_\Sigma$ 是 2π 的整数倍．令 $\tau>0$ 充分大，使得 $\rho[e^{-\zeta\tau}(\zeta I-A)^{-1}B]<1,(\zeta\in\Sigma)$．对 $\alpha\in[0,1]$定义

$$h_\alpha(\zeta)=\det[I-\alpha e^{-\zeta\tau}(\zeta I-A)^{-1}B].$$

那末对一切 $\zeta\in\Sigma, h_\alpha(\zeta)\neq 0$．故 $[\arg h_\alpha(\zeta)]_\Sigma$ 是 2π 的整数倍．进而

$$[\arg h_\alpha(\zeta)]_\Sigma=\frac{1}{i}\int_\Sigma\{h_\alpha'(\zeta)/h_\alpha(\zeta)\}\mathrm{d}\zeta$$

是$[0,1]$上 α 的连续函数，故一致连续，由此推出

$$[\arg h_1(\zeta)]_\Sigma=[\arg h_0(\zeta)]_\Sigma=0.$$

从而

$$[\arg\det(\zeta I-A-e^{-\zeta\tau}B)]_\Sigma=[\arg\det(\zeta I-A]_\Sigma.$$

应用幅角原理

$$\det[\zeta I-A-e^{-\zeta\tau}B)]\text{ 及 }\det[\zeta I-A],$$

在Σ内部有同样多的零点，即 $\det[\zeta I-A-e^{-\zeta\tau}B]$在$\Sigma$内某些点上为零．但这是违背(2.2)的．故 $\forall\lambda\in\sigma[A]\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant 0$．

从(2.2)容易看出

(i) $$\mu\in\sigma[(\zeta I-A)^{-1}B]\Rightarrow|\mu|\neq 1,\quad(\mathrm{Re}(\zeta)=0,\quad\zeta\neq 0,\zeta\overline{\in}\sigma[A]).$$

进而

(ii) $$\rho[(\zeta I-A)^{-1}B]\to 0,\quad|\zeta|\to\infty.$$

最后，令 $\lambda\in\sigma[A]$，且 $\mathrm{Re}(\lambda)=0$．考虑多项式

$$p(\mu,\zeta)=\det[\mu(\zeta I-A)-B],$$

假设存在正常数 $\epsilon, C>0$，使得当$|\zeta-\lambda|\leqslant\epsilon$ 时，$p(\mu,\zeta)$之零点 μ，都满足$|\mu|\leqslant C$，于是能够证明 $p(\mu,\lambda)\equiv 0$．但这与(2.2)是违背的．故

(iii) $$\rho[(\zeta I-A)^{-1}B]\longrightarrow\infty\qquad\text{当 }\zeta\to\lambda.$$

因 $\rho[(\zeta I-A)^{-1}B]$是 ζ 在$\{\zeta:\mathrm{Re}(\zeta)=0,\zeta\overline{\in}\sigma[A]\}$上的连续函数，由(i)，(ii)及(iii) 知，$\lambda\in\sigma[A]$时 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$．再由(i)，(ii)及刚

才推出的结果知当 $\mathrm{Re}(\zeta)=0,\zeta\neq 0$ 时 $\rho[(\zeta I-A)^{-1}B]<1$. $-1\overline{\in}\sigma[A^{-1}B]$是容易看出的.这就完成了定理2.1之证明.

下面我们用单支法及 θ 方法去求解(1.1)~(1.2).

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_n+\theta h,\theta y_{n+1}+(1-\theta)y_n,\theta u_{n+1}+(1-\theta)u_n), \tag{2.6}$$

$$y_{n+1}=y_n+h\theta f(t_{n+1},y_{n+1},v_{n+1})+h(1-\theta)f(t_n,y_n,v_n), \tag{2.7}$$

其中

$$v_n=\delta y_{n+1-m}+(1-\delta)y_{n-m},(m-\delta)h=\tau,m\geqslant 1,$$
$$0\leqslant\theta\leqslant 1,0\leqslant\delta<1.$$

令

$$X=hA,Y=hB.$$

用(2.6)或(2.7)去解(1.1)~(1.2)时,得如下差分方程:

$$\begin{aligned}(I-\theta X)y_{n+1}=&(I+(1-\theta)X)y_n+\delta\theta Yy_{n+2-m}\\&+(\delta(1-\theta)+\theta(1-\delta))Yy_{n+1-m}\\&+(1-\delta)(1-\theta)Yy_{n-m},\end{aligned} \tag{2.8}$$

为了导出(2.8)式之特征方程,令 $y_n=z^n\cdot\xi,\xi\in C^N$ 是待定向量.代入(2.8)得

$$\begin{aligned}(I-\theta X)z^{m+1}\xi=&[(I+(1-\theta)X)z^m+\delta\theta Yz^2\\&+(\delta(1-\theta)+\theta(1-\delta))Yz\\&+(1-\delta)(1-\theta)Y]\xi.\end{aligned}$$

令

$$p(z,\delta)=(\delta z+1-\delta)(\theta z+1-\theta)Y, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}Q(z)=&z(I-\theta X)-(I+(1-\theta)X)\\=&z-1-(\theta z+(1-\theta))X,\end{aligned} \tag{2.10}$$

那末差分方程(2.8)之特征方程为

$$\det[z^mQ(z)-p(z,\delta)]=0.$$

显然,差分方程(2.8)在(X,Y)处是 δ 稳定的,当且仅当

$$\det[z^m Q(z) - p(z,\delta)] = 0 \Rightarrow |z| < 1.$$

我们有如下严格的定义：

定义 2.1 令(X,Y)是给定的一对 $N \times N$ 矩阵.于是递推过程(2.8)被称为在(X,Y)处是稳定的,当且仅当

(a) 矩阵$(I-\theta X-\delta\theta Y)$ 对 $\forall 0 \leqslant \delta < 1$ 可逆,

(b) $y_0, y_1, y_2, \cdots$ 由(2.8) 所产生,满足$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

于是,差分方程(2.8)在(X,Y)处是稳定的,当且仅当

$$(I-\theta X-\delta\theta Y) \text{ 对 } \forall 0 \leqslant \delta < 1 \text{ 可逆}, \tag{2.11a}$$

$$\det[z^m Q(z) - p(z,\delta)] = 0 \Rightarrow |z| < 1 \quad (\forall m \geqslant 1, 0 \leqslant \delta < 1). \tag{2.11b}$$

再考虑如下陈述：

$(I-\theta X-\delta\theta Y)$ 对 $\forall 0 \leqslant \delta < 1$ 可逆,$Q(z)$ 对 $\forall\ |z| \geqslant 1$ 可逆,以及$\operatorname*{Sup}\limits_{|z|=1}\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)] < 1$ 对 $\forall 0 \leqslant \delta < 1$ 成立,

(2.12a)

$(I-\theta X-\delta\theta Y)$ 对 $\forall 0 \leqslant \delta < 1$ 可逆,$Q(z)$ 对 $\forall\ |z| \geqslant 1$ 可逆,以及$\operatorname*{Sup}\limits_{|z|=1}\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)] \leqslant 1$ 对 $\forall 0 \leqslant \delta < 1$ 成立.

(2.12b)

引理 2.2 下列关系成立：

(2.12a) 成立 $\Rightarrow$(2.8) 在(X,Y) 处稳定 $\Rightarrow$(2.12b).

引理 2.3 下列条件是等价的：

(p_1) $\sigma[X] \subseteq S_\theta^*$,

(p_2) $(I-\theta X)$ 可逆,$Q(z)$ 可逆 对 $\forall\ |z| \geqslant 1$.

证明 对$\forall\ |z| \geqslant 1$,$Q(z)$可逆,当且仅当

$$\left(\frac{z-1}{Qz+1-\theta}I - X\right)\text{可逆}(\forall\ |z| \geqslant 1, \theta z + 1 - \theta \neq 0).$$

容易验证

$$\left\{\zeta = \frac{z-1}{\theta z+1-\theta}, \theta z + 1 - \theta \neq 0\right\} \Leftrightarrow \left\{z = \frac{1+(1-\theta)\zeta}{1-\theta\zeta}, 1 - \theta\zeta \neq 0\right\} \tag{2.13}$$

于是,对$\forall |z|\geqslant 1$,$Q(z)$是可逆的,当且仅当$(\zeta I-X)$对$\forall \zeta\in S_\theta^*$,$1-\theta\zeta\neq 0$是可逆的.这说明命题($p_1$)与($p_2$)是等价的.

引理 2.4 设$\sigma[X]\subseteq S_\theta^*$,于是,对一切$\delta\in[0,1)$,

$$\operatorname*{Sup}_{|z|=1}\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]\leqslant \operatorname*{Sup}_{\zeta\in \Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-X)^{-1}Y].$$

进而,当$\delta=0$时,上式成为等式.

证明 对$z\in C$,,$|z|=1$,$\theta z+1-\theta\neq 0$时有

$$\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]=|\delta z+1-\delta|\rho\left[\left(\frac{z-1}{\theta z+1-\theta}I-X\right)^{-1}Y\right]$$

$$\leqslant\rho\left[\left(\frac{z-1}{\theta z+1-\theta}I-X\right)^{-1}Y\right],$$

当$\delta=0$时,上式成为等式,而当$|\delta z+1-\delta|=0$时,$\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]=0$.再由(2.13)中之等价关系便推出引理2.4.

引理 2.5 设$\sigma[X]\subseteq S_\theta^*$,$\operatorname*{Sup}_{\zeta\in \Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-X)^{-1}Y]\leqslant 1$,于是$(I-\theta X-\delta\theta Y)$可逆.

证明 不妨设$\theta\neq 0$,则由S_θ^*之构造便知$\frac{1}{\theta}\notin S_\theta^*$.矩阵$(I-\theta X-\delta\theta Y)$可逆,当且仅当$(I-\delta(\frac{1}{\theta}I-X)^{-1}Y)$是可逆的.再按最大模原理

$$\rho\left[\left(\frac{1}{\theta}I-X\right)^{-1}Y\right]\leqslant \operatorname*{Sup}_{\zeta\in \Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-X)^{-1}Y]\leqslant 1.$$

再注意$0\leqslant\delta<1$,便知$\left[I-\delta\left(\frac{1}{\theta}I-X\right)^{-1}Y\right]$可逆.引理2.5证毕.

定义 2.2 单支法(2.6)或θ方法(2.7)对于延时系统(1.1)(1.2)被称为是稳定的,倘使

$$H\subseteq S,$$

其中

$$H=\{(X,Y):x\in\sigma[X]\Rightarrow \mathrm{Re}(x)<0,\operatorname*{Sup}_{\mathrm{Re}(\zeta)=0}\rho[(\zeta I-X)^{-1}Y]<1\},$$

$$S=\{(X,Y):\text{递推过程(2.8)在}(X,Y)\text{处是稳定的}\}.$$

定理 2.6 对$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant1$,方法(2.6)式(2.7)是稳定的.

证明 当且仅当去证明

$$H\subseteq S.$$

令$(XY)\in H$,那末$\forall x\in\sigma[X]\Rightarrow \mathrm{Re}(x)<0$从而因为$S_\theta^*$之外部,当$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant1$是右半平面内的一个区域,所以

$$\sigma[X]\subseteq S_\theta^*,\quad \frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant1.$$

再使用最大模原理,

$$\operatorname*{Sup}_{\zeta\in\Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-X)^{-1}Y]\leqslant\operatorname*{Sup}_{\mathrm{Re}(\zeta)=0}\rho[(\zeta I-X)^{-1}Y]<1.$$

由引理2.3、引理2.4、引理2.5知$(I-\theta X)$,$(I-\theta X-\delta\theta Y)$可逆,对于$|z|\geqslant1$,$Q(z)$可逆,以及$\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]<1$.由引理2.2便知过程(2.8)于$(X,Y)$处是稳定的.因为$(X,Y)$是$H$中的任意矩阵对,所以$H\subseteq S$.定理2.6证毕.

§5.3 多延时量线性系统的数值处理

我们先考虑$m=2$的情况

$$y'(t)=Ay(t)+B_1y(t-\tau_1)+B_2y(t-\tau_2),t\geqslant0,\quad(3.1)$$

$$y(t)=\phi(t)\qquad t\leqslant0,\quad(3.2)$$

其中

$$\tau_2\geqslant\tau_1>0,A=(a_{ij})_{N\times N},B_k=(b_{ij}^{(k)})_{N\times N},1\leqslant k\leqslant2,$$

$$y(t)=[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_N(t)]^T.$$

定义3.1 如果方程(3.1)的任一解$y(t)$,对任意的$\tau_2\geqslant\tau_1>0$,满足

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0,$$

那末我们就说方程(3.1)是渐近稳定的.

(3.1)的特征方程容易从本章(1.9)式获得

$$\det[\zeta I-A-B_1e^{-\zeta\tau_1}-B_2e^{-\zeta\tau_2}]=0,$$

那末,(3.1)为渐近稳定的充分必要条件为

$$\det[\zeta I - A - B_1 e^{-\zeta\tau_1} - B_2 e^{-\zeta\tau_2}] = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\zeta) < 0. \quad (3.3)$$

§5.1 中我们曾给出(3.3)成立的充分条件.这节,在一定条件下将给出充分必要条件.

引理 3.1 设 $\sigma[A] \subseteq C^-$,当 $\mathrm{Re}(\zeta) > 0$ 时 $(\zeta I - A)^{-1}(B_1 + e^{\zeta\tau}B_2)$ 之特征值为相应特征多项式的单重零点.则 $(\zeta I - A)^{-1} \cdot (B_1 + B_2 e^{\zeta\tau})$ 之特征值当 $\mathrm{Re}(\zeta) > 0$ 时是 ζ 的解析函数.

引理 3.1 之结论可直接从矩阵特征值的解析扰动理论[27]而得到证明.设 $A(\zeta)$ 是 $A(0)$ 的扰动矩阵,$A(\zeta)$ 之每个元素是 ζ 的解析函数.则

(a) λ_i 是 $A(0)$ 的单重特征值,$\lambda_i(\zeta)$ 是 $A(\zeta)$ 之特征值,$\lambda_i(\zeta) \to \lambda_i(\zeta \to 0)$.那末 $\lambda_i(\zeta)$ 是 $\zeta = 0$ 的某邻域内的解析函数.

$$\lambda_i(\zeta) = \lambda_i(0) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \zeta^j.$$

(b) 倘 λ_j 是 $A(0)$ 的 m 重特征根,$\lambda_k(\zeta)$ 是 $A(\zeta)$ 的特征值 $\lambda_k(\zeta) \to \lambda_j$,$k = j_1, j_2, \cdots, j_m$.于是 $\lambda_k(\zeta)$ 是 $\zeta^{\frac{1}{l}}$ 在 $\zeta = 0$ 某邻域内的解析函数,其中 $l \leqslant m$,$\zeta^{\frac{1}{l}}$ 是多值函数 $\zeta^{\frac{1}{l}}$ 的 l 个分支之一.此时

$$\lambda_k(\zeta) = \lambda_j + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\zeta^{1/l})^n.$$

证明上述扰动理论的工作是繁重的,我们只对(a)那部分给出证明,而且是针对引理 3.1 给出的.这个证明方法在一般复分析的教程中都能找到.

引理 3.1 之证明.按假设,$(\zeta I - A)^{-1}(B_1 + B_2 e^{\zeta\tau})$ 在 $\mathrm{Re}(\zeta) > 0$ 时,其特征多项式 $\det[\omega I - (\zeta I - A)^{-1}(B_1 + B_2 e^{\zeta\tau})]$ 只有单重零点.设 $\zeta_0 \in C^+$,即 $\mathrm{Re}(\zeta_0) > 0$,以及

$$\omega_i \in \sigma[(\zeta_0 I - A)^{-1}(B_1 + B_2 e^{\zeta_0 \tau})].$$

那末我们可以确定一个正数 $\varepsilon > 0$,使得在圆盘 $|\omega - \omega_i| \leqslant \varepsilon$ 以内,无其他特征值.令 $C_\varepsilon = \{\omega : |\omega - \omega_i| = \varepsilon\}$ 及 $Q(\omega, \zeta) = \det[\omega(\zeta I - A) - (B_1 + B_2 e^{\zeta\tau})]$.那末 $Q(\omega, \zeta_0)$ 在 C_ε 上不为零,而在 C_ε 内

部有唯一零点ω_i,按幅角原理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{Q_\omega(\omega,\zeta_0)}{Q(\omega,\zeta_0)}d\omega = 1.$$

由$Q(\omega,\zeta)$之定义知它关于ζ是连续的,故存在ζ_0的一个邻域Δ,在上列被积函数中以ζ代替ζ_0,那末上列积分定义了一个ζ的连续函数.由于上述积分只能取整数,故当Δ充分小,$\zeta\in\Delta$时

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\frac{Q_\omega(\omega,\zeta)}{Q(\omega,\zeta)}d\omega = 1.$$

再用幅角原理,上式表明,当$\zeta\in\Delta$时,$Q(\omega,\zeta)$在C_ε中存在且只有一个零点,这个唯一的零点记为$\omega_i(\zeta)$.

按照残数计算公式

$$\omega_i(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\omega\frac{Q_\omega(\omega,\zeta)}{Q(\omega,\zeta)}d\omega.$$

上面的积分本身意味着$\omega_i(\zeta)$是ζ的解析函数,引理3.1证毕.

有了引理3.1我们便可证明如下定理.

定理3.2 在引理3.1之假设下,下列命题等价:

(P_1) 系统(3.1)是渐近稳定的,

(P_2) $\det[\zeta I - A - B_1e^{-\zeta\tau_1} - B_2e^{-\zeta\tau_2}] = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\zeta) < 0$ 对 $\forall\, \tau_2 \geqslant \tau_1 > 0$,

$$(P_3)\quad\begin{cases}(A)\ \lambda\in\sigma[A]\Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda)<0,\\ (B)\quad \rho[(\zeta I - A)^{-1}(B_1 + B_2e^{\zeta\tau})] < 1,\\ \qquad\qquad \forall\,\mathrm{Re}(\zeta) = 0, \zeta\neq 0, \tau = \tau_1 - \tau_2 \leqslant 0.\\ (C)\quad -1 \overline{\in} \sigma[A^{-1}(B_1 + B_2)].\end{cases}$$

证明 命题(P_1)与(P_2)之等价性,由定理2.1的证明类似的理由可得.仅需去证明(P_2)与(P_3)等价即可.

设(P_3)成立.首先注意

$$\begin{aligned}&\det[\zeta I - A - e^{-\zeta\tau_1}(B_1 + B_2e^{\zeta\tau})] = 0\\ \Leftrightarrow\ & e^{\zeta\tau_1}\in\sigma[(\zeta I - A)^{-1}(B_1 + B_2e^{\zeta\tau})].\end{aligned}\tag{3.4}$$

令

$$S=\left\{\zeta:\zeta\in\boldsymbol{C},\left|\frac{1+\frac{1}{2}\zeta}{1-\frac{1}{2}\zeta}\right|<1\right\},$$

$$\Gamma=\left\{\zeta:\zeta\in\boldsymbol{C},\left|\frac{1+\frac{1}{2}\zeta}{1-\frac{1}{2}\zeta}\right|=1\right\}.$$

由条件(A)知 $\sigma[A]\subseteq S$. 若 $\mathrm{Re}(\zeta)>0$,则 $\zeta\overline{\in}S$. 由引理 3.1 知,$[(\zeta I-A)^{-1}(B_1+B_2e^{\zeta\tau})]$之特征值于 ζ 处解析,再注意 $|e^{\zeta\tau}|\leqslant1$ 及 $\rho[(\zeta I-A)^{-1}(B_1+B_2e^{\zeta\tau})]\to0,(\zeta\to\infty)$. 由无界区域的最大模原理,有

$$\rho[(\zeta I-A)^{-1}(B_1+B_2e^{\zeta\tau})]\leqslant\sup_{\zeta\in\Gamma}\rho[(\zeta I-A)^{-1}(B_1+B_2e^{\zeta\tau})],\quad \mathrm{Re}(\zeta)\geqslant0. \tag{3.5}$$

再注意(B),有

$$\sup_{\zeta\in\Gamma}\rho[(\zeta I-A)^{-1}(B_1+B_2e^{\zeta\tau})]\leqslant1, \tag{3.6}$$

从而

$$\rho[(\zeta-A)^{-1}(B_1+B_2e^{\zeta\tau})]\leqslant1,\quad 对\ \mathrm{Re}(\zeta)\geqslant0. \tag{3.7}$$

联合(3.4),(3.7),(B)及(C),便知(P_2)成立.

再证(P_2)⇒(P_3).

先证 $\lambda\in\sigma[A]\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant0$. 反之设某 $\lambda\in\sigma[A]$,但 $\mathrm{Re}(\lambda)>0$,那末可以找到以 λ 为中心的正向圆周Σ,且当 $\zeta\in\Sigma$时 $\mathrm{Re}(\zeta)>0$ 及$(\zeta I-A)^{-1}$存在. 令 τ_1 充分大,使得当 $\zeta\in\Sigma$时

$$\rho[e^{-\zeta\tau_1}(\zeta I-A)^{-1}(B_1+B_2e^{\zeta\tau})]<1. \tag{3.8}$$

对于 $\alpha\in[0,1]$,定义

$$h_\alpha(\zeta)=\det[I-\alpha e^{-\zeta\tau_1}(\zeta I-A)^{-1}(B_1+B_2e^{\zeta\tau})]. \tag{3.9}$$

于是当 $\zeta\in\Sigma$时 $h_\alpha(\zeta)\neq0$ 故

$$[\arg h_\alpha(\zeta)]_\Sigma=2\pi m,\qquad m\ 为整数.$$

又

$$[\arg h_\alpha(\zeta)]_\Sigma = \frac{1}{\mathrm{i}}\int_\Sigma \frac{h_\alpha'(\zeta)}{h_\alpha(\zeta)}\mathrm{d}\zeta$$

在[0,1]上关于 α 一致连续,故

$$[\arg h_1(\zeta)]_\Sigma = [\arg h_0(\zeta)]_\Sigma = 0, \qquad (3.10)$$

因此

$$\{\arg\det[I - e^{-\zeta\tau_1}(\zeta I - A)^{-1}(B_1 + B_2\mathrm{e}^{\zeta\tau})]\}_\Sigma = 0,$$

进而

$$\{\arg\det[\zeta I - A - \mathrm{e}^{-\zeta\tau_1}(B_1 + B_2\mathrm{e}^{\zeta\tau})]\}_\Sigma$$
$$= \{\arg\det(\zeta - A)\}_\Sigma.$$

按照幅角原理,在Σ内部,有某些 ζ 使得

$$\det[\zeta I - A - \mathrm{e}^{-\zeta\tau_1}(B_1 + B_2\mathrm{e}^{\zeta\tau})] = 0,$$

但这与(P_2)是违背的.故 $\lambda\in\sigma[A]\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant 0$.

注意(P_2)及(3.4),有

(i) $\mu\in\sigma[(\zeta I - A)^{-1}(B_1 + B_2\mathrm{e}^{\zeta\tau})]\Rightarrow|\mu|\neq 1$,($\mathrm{Re}(\zeta)=0$, $\zeta\neq 0\quad \zeta\overline{\in}\sigma[A]$).

显然还有

(ii) $\rho[(\zeta I - A)^{-1}(B_1 + B_2\mathrm{e}^{\zeta\tau})]\to 0$,$\mathrm{Re}(\zeta)\geqslant 0$,$|\zeta|\to\infty$.

最后假定 $\lambda\in\sigma[A]\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)=0$.令

$$P(\mu,\zeta) = \det[\mu(\zeta I - A) - (B_1 + B_2\mathrm{e}^{\zeta\tau})].$$

如果存在正数 ϵ,k,使得当 $|\zeta-\lambda|\leqslant\epsilon$ 时,$p(\mu,\zeta)$之零点满足 $|\mu|\leqslant k$,那末可以验证 $p(\mu,\lambda)\equiv 0$,但这与(P_2)是矛盾的.所以

(iii) $\rho[(\zeta I - A)^{-1}(B_1 + B_2\mathrm{e}^{\zeta\tau})]\to\infty$, 当 $\zeta\to\lambda$.

因为 $\rho[(\zeta I - A)^{-1}(B_1 + B_2\mathrm{e}^{\zeta\tau})]$是 ζ 在$\{\zeta:\mathrm{Re}(\zeta)=0,\zeta\overline{\in}\sigma[A]\}$上的连续函数,由(i),(ii)及(iii)推知 $\lambda\in\sigma[A]\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0$.对于(i),(ii)及刚才证明的结果,使用连续函数之介值定理便知

$$\rho[(\zeta I - A)^{-1}(B_1 + B_2\mathrm{e}^{\zeta\tau})] < 1, \qquad (\mathrm{Re}(\zeta) = 0,\zeta\neq 0).$$

条件(C)是容易验证的.定理 3.2 证毕.

在用线性多步法求解多延时量线性系统之前,我们先讨论用

线性多步法求解如下系统：

$$y'(t) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t \geqslant 0, \quad (3.11)$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \leqslant 0. \quad (3.12)$$

其中 $A=(a_{ij})_{N\times N}$，$B=(b_{ij})_{N\times N}$，$\phi(t)\in \mathbf{C}^N$ 是给定函数，$y(t)\in \mathbf{C}^N$是未知的，$\tau>0$ 为常数延时量.

对于方程 $y'(t)=f[t,y(t),y(t-\tau)]$，我们定义如下方法：

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n-j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f(t_{n-j}, y_{n-j}, y_{n-j}^h), \quad (3.13)$$

其中 $y_n \sim y(t_n)$，$t_n=nh$，y_{n-j}^h是$y(t_{n-j}-\tau)$之逼近值. 令 $\tau=(m-\delta)h$，$m\geqslant 1$，$0\leqslant\delta<1$，那末 y_{n-j}^h可以用插值多项式来表示

$$y_{n-j}^h = \sum_{k=-r}^{S} L_k(\delta) y_{n-j-m+k},$$

$$L_K(\delta) = \prod_{\substack{j=-r\\ j\neq k}}^{S}\left(\frac{\delta-j}{k-j}\right).$$

用(3.13)去求解(3.11)～(3.12)时得如下差分方程：

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n-j} = \sum_{j=0}^{k}\beta_j \bar{A} y_{n-j} + \sum_{j=0}^{k}\beta_j \bar{B}\sum_{i=-r}^{S} L_i(\delta) y_{n-j-m+i}. \quad (3.14)$$

其中 $\bar{A}=hA$，$\bar{B}=hB$.

定义 3.2 令 $\bar{A}=hA$，$\bar{B}=hB$. 那末过程(3.14)被称为在$(\bar{A},\bar{B})$处是 δ 稳定的，当且仅当

$$\lim_{h\to\infty} y_n = 0, \qquad 对\ \forall\, m \geqslant S+1.$$

引理 3.3 如果系统(3.11)之系数满足

1) $\lambda\in\sigma[A] \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda)<0$,

2) $\sup_{\mathrm{Re}(\zeta)=0}\rho[(\zeta I-A)^{-1}B]<1$,

那末(3.11)之任一解 $y(t)\to 0\ (t\to\infty)$对$\forall\,\tau>0$ 成立.

证明 引理 3.3 是定理 2.1 之直接推论.

令

$$H = \{(\bar{A},\bar{B},): \sigma[\bar{A}]\subseteq \mathbf{C}^-, \sup_{\mathrm{Re}(\zeta)=0}\rho[(\zeta I-A)^{-1}B]<1\},$$

$$S_\delta = \{(\bar{A},\bar{B}): \quad (3.14)\text{在}(\bar{A},\bar{B})\text{处是 }\delta\text{ 稳定的}\},$$

$$S = \prod_{0\leqslant\delta<1} S_\delta.$$

接下去，我们的目的是要指明 $H\subseteq S$ 的条件. 此时我们便有理由称线性多步法对于 $\mathrm{DDE_S}$ 是稳定的.

与 § 2 中一样，我们可以求出(3.14)之特征方程

$$\det[z^{m+r}Q(z) - p(z,\delta)] = 0, \tag{3.15}$$

其中

$$Q(z) = \rho(z) - \bar{A}\sigma(z),$$

$$p(z,\delta) = \alpha(z,\delta)\sigma(z)\bar{B},$$

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j z^{k-j},$$

$$\sigma(z) = \sum_{j=0}^{k}\beta_j z^{k-j},$$

$$\alpha(z,\delta) = \sum_{j=-r}^{S}L_j(\delta)z^{j+r}, \qquad 0\leqslant\delta<1,$$

$$L_k(\delta) = \prod_{\substack{j=-r\\ j\neq k}}^{S}\left(\frac{\delta-j}{k-j}\right).$$

显然，差分方程(3.14)在$(\bar{A},\bar{B})$是 δ 稳定的，当且仅当

$$\det[z^{m+r}Q(z) - p(z,\delta)] = 0 \Rightarrow |z| < 1. \tag{3.16}$$

利用第四章 § 4.4 中定理 4.2，(3.16)成立，当且仅当

(a) $Q(z)$是可逆的，(当$|z|\geqslant 1$)，

(b) $\sup\limits_{|z|=1}\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]\leqslant 1, \quad \forall m\geqslant m_0$,

(c) $F_m(z)\neq 0, \forall m\geqslant m_0$ 及 $\forall |z|=1, \rho[Q^{-1}(z)p(z,\delta)]=1$.

其中 m_0 是使

$$\deg F_m(z) = \deg z^{m+r}Q(z)$$

成立的最小整数，$F_m(z)=\det[z^{m+r}Q(z)-p(z,\delta)]$.

如果我们用线性多步法

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n-j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n-j} \tag{3.17}$$

去解 ODE_s

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & \sigma[A]\subseteq C^-, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.18}$$

得差分方程

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n-j} - \sum_{j=0}^{k}\beta_j \bar{A} y_{n-j} = 0,$$

而上述差分方程的特征方程为

$$\det[\rho(z)I - \sigma(z)\bar{A}] = 0, \tag{3.19}$$

其中

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j z^{k-j},$$

$$\sigma(z) = \sum_{j=0}^{k}\beta_j z^{k-j}.$$

显然,线性多步法对于 ODE_s 为 A 稳定的,当且仅当

$$\det[\rho(z)I - \sigma(z)\bar{A}] = 0 \Rightarrow |z| < 1.$$

其否命题为

$$|z| \geqslant 1 \Rightarrow Q(z) = \rho(z)I - \sigma(z)\bar{A} \text{ 是可逆的}.$$

再由第一章§1.4 定理 4.2 知

引理 3.4 下述命题等价($\sigma[A]\subseteq C^-$):

线性多步法(3.17)是 A 稳定的,

$|z| \geqslant 1 \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\dfrac{\rho(z)}{\sigma(z)}\right) \geqslant 0$,

$|z| \geqslant 1 \Rightarrow \rho(z)I - \sigma(z)\bar{A}$ 是可逆的.

引理 3.5[14] 对于多项式 $\alpha(z,\delta)$,有

$r \leqslant S \leqslant r+2 \Rightarrow |\alpha(z,\delta)| \leqslant 1$;

$r+S > 0, r \leqslant S \leqslant r+2$ 及 $0 < \delta < 1$,

于是 $|\alpha(z,\delta)| = 1 \Leftrightarrow z = 1$.

定理 3.6 对于过程(3.14),如果 $r \leqslant S \leqslant r+2$,则 $S = S_0$.

证明 若 $r=S=0$,则(3.16)成立之充要条件(a),(b)及(c)与 δ 无关,于是 $S_0=S$.

如果 $r+S>0$. 令 $(\bar{A},\bar{B})\in S_0$. 那么(a),(b)及(c)对于 $\delta=0$ 成立. 利用引理 3.5 之第一部分及插值之性质,

$$\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]\leqslant\rho[Q(z)^{-1}p(z,0)]\leqslant 1,\forall 0\leqslant\delta<1,\tag{3.20}$$

因此 $|z|\geqslant 1$ 时(a)成立, $0\leqslant\delta<1$ 时(b)成立. $\delta=0$(c)成立. 如果对某 δ, $0<\delta<1$(c)不成立,即

$$\det[z^{m+r}Q(z)-p(z,\delta)]=0\tag{3.21}$$

对 $m\geqslant S+1$,某些 $|z|=1$ 及 $\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]=1$ 时成立. 利用(3.20),我们有

$$1=\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]\leqslant\rho[Q(z)^{-1}p(z,0)]\leqslant 1.$$

上式中蕴含着 $|\alpha(z,\delta)|=1$. 再用引理 3.5 之第二部分,知 $z=1$,代入(3.21)得

$$\det[Q(1)-p(1,\delta)]=0,\qquad\forall 0<\delta<1.$$

令 $\delta\to 0$ 得

$$\det[Q(1)-p(1,0)]=0.$$

但这是与(c)联同 $\delta=0$ 成立是矛盾的. 因此(c)对一切 $0\leqslant\delta<1$ 时成立,故 $(\bar{A},\bar{B})\in S_0\Rightarrow(\bar{A},\bar{B})\in S$. 从而 $S_0=S$.

定理 3.7 设 $r\leqslant s\leqslant r+2$,于是 $H\subseteq S\Leftrightarrow$(3.17)是 A 稳定的.

证明 设(3.17)是 A 稳定的. 由引理 3.4 $|z|\geqslant 1$ 时 $Q(z)=\rho(z)I-\sigma(z)\bar{A}$ 是可逆的,因此当 $(\bar{A},\bar{B})\in H$ 时(a)成立;

我们接下去考虑两种情况:

(Ⅰ)对某些 z, $|z|=1$, $\sigma(z)=0$. 那末 $p(z,\delta)=0$, $Q(z)=\rho(z)I$,显然 $\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]=0(<1)$.

(Ⅱ)对某些 z, $|z|=1$, $\sigma(z)\neq 0$. 由引理 3.4,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}\right)=0\tag{3.22}$$

或者

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}\right) > 0. \tag{3.23}$$

若(3.22)成立. 当$(\bar{A},\bar{B}) \in H$时

$$\operatorname*{Sup}_{\operatorname{Re}(\zeta)=0} \rho[(\zeta I - \bar{A})^{-1}\bar{B}] < 1,$$

或者

$$\operatorname*{Sup}_{(3.22)} \rho\left[\left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} I - \bar{A}\right)^{-1} \bar{B}\right] < 1.$$

若(3.23)成立. 利用最大模原理

$$\rho\left[\left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} I - \bar{A}\right)^{-1} \bar{B}\right] \leqslant \operatorname*{Sup}_{\operatorname{Re}(\zeta)=0} \rho[(\zeta I - \bar{A})^{-1}\bar{B}] < 1,$$

联合(3.22)与(3.23)便有

$$\operatorname*{Sup}_{|z|=1} \rho[Q(z)^{-1} p(z,\delta)]$$

$$\leqslant \operatorname*{Sup}_{|z|=1} \rho\left[\left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} - \bar{A}\right)^{-1} \bar{B}\right] < 1,$$

这样, 当$(\bar{A},\bar{B}) \in H$推知(a), (b)及(c)成立, 故$(\bar{A},\bar{B}) \in S \Rightarrow H \subseteq S$.

相反, 设$H \subseteq S$. 再令$\sigma[\bar{A}] \subseteq C^-$. 选择适当的$B$, 使得$(\bar{A},\bar{B}) \in H \Rightarrow (\bar{A},\bar{B}) \in S$. 由(a)推知当$|z| \geqslant 1$时$Q(z)$是可逆的, 按引理3.4(3.17)是$A$稳定的. 定理3.7证毕.

§5.4 多延时量线性系统的进一步讨论

上二节我们讨论了多延时量线性系统理论解的一些性质, 以及用θ方法及线性多步法求解线性系统的数值稳定性问题. 这一节我们考虑用线性多步法去求解m个延时量的线性系统. 考虑

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ay(t) + B_1 y(t-\tau_1) + B_2 y(t-\tau_2) + \cdots \\ &\quad + B_m y(t-\tau_m), \qquad t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$y(t) = \phi(t), \qquad t \leqslant 0, \tag{4.2}$$

这里$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \cdots, y_N(t)]^T$, A, B_j, $1 \leqslant j \leqslant m$是$N \times N$常数矩阵, $\tau_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\phi(t)$是给定函数.

在定理3.2中, 我们曾给出(4.1)为渐近稳定的一个充分必要

条件.但在实际应用中,这些条件的验证往往是十分困难的.下面我们将给出一个充分条件,有时,这个条件的验证往往比较容易.

定理 4.1 令 $m\geqslant 1$ 是给定正整数.如果(4.1)中的系数满足

$$\eta(A)=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A+A^{*})<0, \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\|B_j\|<-\eta(A), \tag{4.4}$$

那末对任意的 $\tau_m\geqslant\tau_{m-1}\geqslant\cdots\geqslant\tau_1>0$,(4.1)之任一解 $y(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0.$$

这里

$$\lambda_{\max}(B)=\max\{\lambda:\lambda\in\sigma[B]\},$$

$$\|B\|=\operatorname*{Sup}_{\|\xi\|=1}\|B\xi\|,\ \|\xi\|^2=\langle\xi,\xi\rangle,\xi\in C^N.$$

证明 回忆本章定理 1.4 可推得,考虑用线性多步法(3.17)去解(4.1)~(4.2),得差分方程

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j\Big[Ay_{n+j}+\sum_{i=1}^{m}B_i y^h(t_{n+j}-\tau_i)\Big], \tag{4.5}$$

其中 $y^h(t)$当 $t>0$ 时,用 Lagrange 插值多项式替代:

$$y^h(t_i+\varepsilon h)=\sum_{j=-r}^{S}L_j(\varepsilon)y_{i+j}, \tag{4.6}$$

$$L_j(\varepsilon)=\prod_{\substack{k=-r\\k\neq j}}^{S}\Big(\frac{\varepsilon-k}{j-k}\Big). \tag{4.7}$$

把(4.6)~(4.7)代入(4.5),我们有如下递推关系:

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\Big[\bar{A}y_{n+j}+\sum_{i=1}^{m}\bar{B}_i\sum_{p=-r}^{S}L_p(\delta_i)y_{n+j-l_i+p}\Big], \tag{4.8}$$

这里 $\tau_i=(l_i-\delta_i)h$, $0\leqslant\delta_i<1$, $1\leqslant i\leqslant m$, $\bar{A}=Ah$, $\bar{B}_j=B_jh$, $1\leqslant j\leqslant m$,及 $l_m\geqslant l_{m-1}\geqslant\cdots\geqslant l_1\geqslant S+1$.

我们将主要研究(4.8)的渐近稳定性.

定义 4.1 设$(\bar{A}_1,\bar{B}_1,\cdots,\bar{B}_m)$是给定的 $N\times N$ 矩阵,于是

差分方程(4.8)被称为在$(\bar{A}_1, \bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_m)$处是$(\delta_1\delta_2\cdots\delta_m)$稳定的，当且仅当

(Ⅰ)　$(\alpha_k I - \beta_k \bar{A})$是可逆的，

(Ⅱ)　(4.8)的任一解满足$\lim\limits_{h\to\infty} y_n = 0$.

令

$$H = \{(\bar{A}, \bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_m):(\bar{A}, \bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_m)\text{ 满足}(4.3)\sim(4.4)\},$$

$$S_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m} = \{(\bar{A}, \bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_m):\text{过程}(4.8)\text{ 在}(\bar{A}, \bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_m)\text{处是}(\delta_1\delta_2\cdots\delta_m)\text{ 稳定的}\},$$

$$S(r,s) = \prod_{\substack{0\leqslant\delta_j\leqslant1 \\ j=1,2,\cdots,m}} S_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m}.$$

定义 4.2　过程(4.8)被称为数值稳定的，倘使

$$H \subseteq S(r,s). \tag{4.9}$$

与§5.3一样，我们从线性差分方程的稳定性理论知道，(4.8)在$(\bar{A}, \bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_m)$处$(\delta_1\delta_2\cdots\delta_m)$稳定的当且仅当

$$(\alpha_k I - \beta_k \bar{A})\text{ 是可逆的,} \tag{4.10a}$$

$$F_m(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1, \tag{4.10b}$$

其中

$$F_m(z) = \det[p_m(z)], \tag{4.11}$$

$$p_m(z) = Q(z)z^{l_m+r} - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z)z^{l_m-l_j}, \tag{4.12}$$

$$Q(z) = \rho(z)I - \sigma(z)\bar{A}, \tag{4.13}$$

$$Q_j(z) = r(z,\delta_j)\sigma(z)\bar{B}_j,\quad 1\leqslant j\leqslant m, \tag{4.14}$$

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j,$$

$$\sigma(z) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j z^j,$$

$$r(z,\delta_j) = \sum_{i=-r}^{S} L_i(\delta_j)z^{i+r},\quad 1\leqslant j\leqslant m, \tag{4.15}$$

$$0\leqslant\delta_j<1, 1\leqslant j\leqslant m.$$

下面的定理 4.2,对后面的讨论是有用的.

定理 4.2 下列命题等价:

一个线性多步法 $\langle \rho, \sigma \rangle$ 是 A 稳定的, (4.16a)

$\mathrm{Re}(\bar{h}) < 0 \Rightarrow \rho(z) - \bar{h}\sigma(z)$ 是 Schur 多项式, (4.16b)

$$|z| \geqslant 1 \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}\right) \geqslant 0, \tag{4.16c}$$

$\sigma[\bar{A}] \subseteq C^-$, $|z| \geqslant 1 \Rightarrow \rho(z)I - \sigma(z)\bar{A}$ 可逆.(4.16d)

证明 关于(4.16a)~(4.16c)之等价性,可见第四章引理 3.4.我们仅需证明(4.16d)与(4.16b)等价即可.(4.16d)可阐述为当 $\sigma[\bar{A}] \subseteq C^-$ 时

$$\det[\rho(z)I - \sigma(z)\bar{A}] = 0 \Rightarrow |z| < 1.$$

但

$$\det[\rho(z)I - \sigma(z)\bar{A}] = \prod_{i=1}^{l} [\rho(z) - \sigma(z)\bar{h}_i]^{n_i},$$

其中 $\bar{h}_i = \lambda_i h$, $\lambda_i \in \sigma[A]$, λ_i 之代数重数为 n_i, $\sum_{i=1}^{l} n_i = N$. 从而 $\det[\rho(z)I - \sigma(z)\bar{A}]$ 是 Schur 多项式,当且仅当每个 $\rho(z) - \sigma(z)\bar{h}_i$ 是 Schur 多项式.定理 4.2 证毕.

定理 4.3 设 $F_m(z)$ 定义于(4.11)~(4.15),$Q(z)$ 定义于(4.13),$Q_j(z)$,$1 \leqslant j \leqslant m$ 定义于(4.14).如果

(a) 当 $|z| \geqslant 1$ 时 $Q(z)$ 是可逆的,

(b) 当 $|z| = 1$ 时 $\sum \| Q(z)^{-1} \| \| Q_j(z) \| \leqslant 1$,

(c) 当 $|z| = 1$ 时 $F_m(z) \neq 0$,

则 $F_m(z)$ 是 Schur 多项式.

证明 令

$$F_m(z) = \det[p_m(z)] = \det[Q(z)z^{lm+r} + p(z)], \tag{4.17}$$

这里

$$p(z) = -\sum_{j=1}^{m} Q_j(z) z^{l_m - l_j}. \tag{4.18}$$

令

$$G_m(z) = \det[z^{l_m+r}Q(z)], \tag{4.19}$$

$$R_m(z) = I + z^{-l_m-r}Q(z)^{-1}p(z), \tag{4.20}$$

$$H_m(z) = \det[R_m(z)]. \tag{4.21}$$

于是

$$F_m(z) = G_m(z)H_m(z).$$

我们再用 S 表示一个正向单位圆周,

$$S = \{e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, i \doteq \sqrt{-1}\}.$$

对于任一解析函数 $f(z)$,倘使在圆周 S 上非零,我们用 $[\arg f(z)]_S$ 表示当 z 绕 S 周时,$f(z)$的幅角增量.于是

$$[\arg F_m(z)]_S = [\arg G_m(z)]_S + [\arg H_m(z)]_S. \tag{4.22}$$

我们来证明,在定理的条件下$[\arg H_m(z)]_S = 0$.

令

$$h_\alpha(z) = \det[I + \alpha z^{-l_m-r}Q(z)^{-1}p(z)], 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

对于 $z \in S$,注意(b),我们有

$$\rho[Q(z)^{-1}p(z)] \leqslant \| Q(z)^{-1} \| \cdot \| p(z) \|$$

$$\leqslant \| Q(z)^{-1} \| \left\{ \sum_{j=1}^{m} \| Q_j(z) \| \right\} \leqslant 1.$$

再注意到条件(c),当$|z| = 1$ 时,$h_\alpha(z) \neq 0, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.那末在 S 上 $h_\alpha(z)$之幅角增量为$[\arg h_\alpha(z)]_S = 2\pi K_\alpha$,此处 K_α 为某整数,它定义为

$$K_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{h_\alpha'(z)}{h_\alpha(z)} dz,$$

它显然是$[0,1]$上 α 的连续函数,从而一致连续于$[0,1]$,且只能是整数,从而

$$K_1 = K_0 = 0,$$

它指明$[\arg H_m(z)]_S = 0$.

从(4.22)我们看出$[\arg G_m(z)]_S = [\arg F_m(z)]_S$,利用幅角原理,知道,在单位圆 S 内部,$F_m(z)$与 $G_m(z)$有同样多个零点,

但当 $l_1 \geqslant S+1$ 时，$\deg F_m(z) = \deg G_m(z)$，且 $G_m(z)$ 是一个 Schur（由条件(a)）多项式，从而 $F_m(z)$ 是一个 Schur 多项式．定理 4.3 证毕．

定理 4.4 设矩阵 A 满足 $A^*A \leqslant AA^*$，插值(4.6)～(4.7)满足 $r \leqslant S \leqslant r+2$．于是对任意的 $\tau_m \geqslant \tau_{m-1} \geqslant \cdots \tau_1 > 0$，

$$\left.\begin{cases} \alpha_k I - \beta_k \bar{A} \text{ 可逆，及} \\ H \subseteq S(r,s) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \text{多步法} \langle \rho, \sigma \rangle \text{ 是 } A \text{ 稳定的}.$$

证明 设 $\langle \rho, \sigma \rangle$ 是 A 稳定的．令 $(\bar{A}, \bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_m) \in H$．我们来指明 $\alpha_k I - \beta_k \bar{A}$ 是可逆的 $(\sigma[\bar{A}] \subseteq \boldsymbol{C}^-)$，及 $H \subseteq S(r,s)$．注意(4.16c)知 $\alpha_k / \beta_k > 0$，再注意 $\sigma[A] \subseteq \boldsymbol{C}^-$，便知 $\alpha_k I - \beta_k \bar{A}$ 可逆．再由(4.16d) $|z| \geqslant 1$ 时 $Q(z)$ 可逆，从而定理 4.3 之条件(a)被满足．对于 $|z| = 1$，倘使 $\sigma[z] = 0$，于是 $\rho[z] \neq 0$，$Q_j(z) = 0$，$1 \leqslant j \leqslant m$，容易看出 $F_m(z) = \det[z^{l_m + r} Q(z)]$ 是一个 Schur 多项式．对 $|z| = 1$，若 $\sigma[z] \neq 0$，则

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \| Q(z)^{-1} \| \cdot \| Q_j(z) \| &\leqslant \| Q(z)^{-1} \| \sum_{j=1}^{m} \| \bar{B}_j \| \cdot | \sigma(z) | \\ &< \| \rho(z) I - \bar{A} \sigma(z)^{-1} \| \cdot | \sigma(z) | \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_{\max}(\bar{A}^* + \bar{A}) \right\} \\ &= \left\| \left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} I - \bar{A} \right)^{-1} \right\| \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_{\max}(\bar{A} + \bar{A}^*) \right\}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \bar{A} &= H_1 + \mathrm{i} H_2, \\ H_1 &= \frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{A}^*), \\ H_2 &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\bar{A} - \bar{A}^*), \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

于是

$$\left\| \left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} I - \bar{A} \right)^{-1} \right\|^2 \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_{\max}(\bar{A} + \bar{A}^*) \right\}^2$$

$$= \left\| \left\{ \left[\mathrm{Re}\left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}\right) I - H_1 \right] + \mathrm{i}\left[\mathrm{Im}\left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}\right) I - H_2 \right] \right\}^{-1} \right\|^2 \lambda_{\min}(-H_1)^2$$

$$\leqslant \frac{\{\lambda_{\min}(-H_1)\}^2}{\min\left\{\mu : \mu \in \sigma\left[\left(\mathrm{Re}\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} I - H_1 \right)^2 + \left(\mathrm{Im}\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} I - H_2 \right)^2 \right]\right\}}$$

$$\leqslant \frac{\{\lambda_{\min}(-H_1)\}^2}{\min\left\{\mu : \mu \in \sigma\left[\left(\mathrm{Re}\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} I - H_1 \right)^2 \right]\right\}}$$

$$\leqslant 1.$$

这样

$$\sum_{j=1}^{m} \| Q(z)^{-1} \| \cdot \| Q_j(z) \| < 1, \text{当} \ |z| = 1. \quad (4.23)$$

(4.23)对于定理 4.3 的条件(b)～(c)是充分的. 从而 $F_m(z)$是 Schur 多项式,这意味着$(\bar{A}, \bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_m) \in S(r,s)$.

相反,设 $\alpha_k I - \beta_k \bar{A}$ ($\sigma[\bar{A}] \subseteq C^-$)是可逆的,以及 $S(r,S) \supseteq H$. 于是$(\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \cdots, \bar{B}_m) \in H \Rightarrow (\bar{A}, \bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_m) \in S(r, S)$,按 $S(r,s)$之定义知此时 $F_m(z) = \det[Q(z) z^{l_m + r} + p(z)]$ 是 Schur 多项式,我们回想起第四章定理 4.2 及使用这个定理知,当$|z| \geqslant 1$ 时 $Q(z)$是可逆的,按等价性命题,本章定理 4.2 知 $\langle \rho, \sigma \rangle$是 A 稳定的. 这便完成了定理 4.4 之证明.

推论 4.5 如果 $A = a, B_1 = a_1, B_2 = a_2, \cdots, B_m = a_m$ 为复数,则下列命题等价:

$$\langle \rho, \sigma \rangle \text{ 是 } A \text{ 稳定的}, \quad (4.24a)$$

$$\langle \rho, \sigma \rangle \text{ 是 } p_m \text{ 稳定的}, \quad (4.24b)$$

$$\langle \rho, \sigma \rangle \text{ 是 } Gp_m \text{ 稳定的}, \quad (4.24c)$$

第六章　非线性延时微分方程的数值解

§6.1　理论解的性质

在前面两章中，我们讨论了 θ 方法，Runge-Kutta 方法及线性多步法用于解常系数线性方程(组)的数值稳定性，主要地研究了上述方法的 P 稳定性，GP 稳定性，P_m 稳定性及 GP_m 稳定性；对于变系数延时方程，我们还研究了 PN 稳定性及 GPN 稳定性．这些概念，在常微分方程数值解中相当于 A 稳定性及 AN 稳定性，从上面的讨论，我们已经看出，变系数方程的数值处理要比常系数方程困难得多，所得结果也少．下面涉及更为困难的问题是非线性延时方程的数值解：

$$y'(t) = f[t, y(t), y(t-\tau)], \qquad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

$$y(t) = \phi(t), \qquad t \leqslant 0, \tag{1.2}$$

其中 $f:[0,\infty]\times C^N\times C^N \longrightarrow C^N$，$Y:R\longrightarrow C^N$，$\tau>0$，$\phi(t)\in C^N$ 是给定向量函数．

引理 1.1　考虑方程

$$y'(t) = f[t, y(t), u(t)], \qquad t \geqslant 0, \tag{1.3}$$

$$y(0) = y_0 \tag{1.4}$$

及

$$z'(t) = f[t, z(t), v(t)], \qquad t \geqslant 0, \tag{1.5}$$

$$z(0) = z_0, \tag{1.6}$$

其中 $f:[0,+\infty]\times C^N\times C^N\to C^N$，$y, z, u, v:[0,\infty]\to C^N$．

假设(1.3)～(1.4)有唯一解且

$$\mathrm{Re}\langle f(t,y_1,u) - f(t,y_2,u), y_1 - y_2\rangle \leqslant \sigma(t)\,\|y_1 - y_2\|^2,$$

$$\forall\, t\in[0,\infty), \forall\, u, y_1, y_2 \in C^N, \tag{1.7}$$

$$\|f(t,y,u_1) - f(t,y,u_2)\| \leqslant \gamma(t)\,\|u_1 - u_2\|,$$

$$\forall t \in [0,\infty], \forall y, u_1, u_2 \in C^N, \qquad (1.8)$$

$$\sigma(t) < 0, \qquad \forall t \geqslant 0, \qquad (1.9)$$

$$r(t) \leqslant -\sigma(t), \qquad \forall t \geqslant 0, \qquad (1.10)$$

于是

$$\| y(t) - z(t) \| \leqslant \max\{ \| y_0 - z_0 \| , \max_{0\leqslant x\leqslant t} \{ r(x) \| u(x) - v(x) \| / [-\sigma(x)] \} \}. \qquad (1.11)$$

证明　按 C^N 中的范数定义，我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| y(t) - z(t) \|^2 = \mathrm{Re}\langle y'(t) - z'(t), y(t) - z(t) \rangle$$

$$= \mathrm{Re}\langle f(t, y(t), u(t)) - f(t, z(t), v(t)), y(t) - z(t) \rangle$$

$$= \mathrm{Re}\langle f(t, y(t), u(t)) - f(t, y(t), v(t)), y(t) - z(t) \rangle$$

$$+ \mathrm{Re}\langle f(t, y(t), v(t)) - f(t, z(t), v(t)), y(t) - z(t) \rangle.$$

使用 Schartz 不等式，我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| y(t) - z(t) \|^2 \leqslant \gamma(t) \| u(t) - v(t) \| \cdot \| y(t) - z(t) \| + \sigma(t) \| y(t) - z(t) \|^2.$$

令 $Y(t) = \| y(t) - z(t) \|$，则

$$Y(t) Y'(t) \leqslant \sigma(t) Y(t)^2 + \sigma(t) \| u(t) - v(t) \| \cdot Y(t).$$

再考虑如下方程

$$\begin{cases} \widetilde{Y}'(t) = \sigma(t)\widetilde{Y}(t) + \gamma(t) \| u(t) - v(t) \| , \\ \widetilde{Y}(0) = \| y_0 - z_0 \| , \end{cases}$$

那末容易验证，对一切 $t \geqslant 0$，有

$$Y(t) \leqslant \widetilde{Y}(t).$$

如果令 $f(t) = \gamma(t) \| u(t) - v(t) \|$，则

$$\widetilde{Y}'(t) = \sigma(t)\widetilde{Y}(t) + f(t),$$

$$\widetilde{Y}(0) = \| y_0 - z_0 \| ,$$

使用第四章定理 6.1，有

$$Y(t) \leqslant \widetilde{Y}(t) \leqslant \max\{ \| y_0 - z_0 \| , \max_{0\leqslant x\leqslant t} \{ \gamma(x) \| u(x) - v(x) \| / (-\sigma(x)) \} \},$$

$$\forall t \geqslant 0,$$

引理 1.1 成立.

定理 1.2 考虑如下非线性延时微分方程:

$$y'(t) = f[t, y(t), y(t-\tau)], \qquad t \geqslant 0, \tag{1.12}$$

$$y(t) = \phi(t), \qquad t \leqslant 0, \tag{1.13}$$

其中 f 满足条件(1.7)~(1.8), $\sigma(t)$, $\gamma(t)$ 满足条件(1.9)~(1.10). 于是

$$\| y(t) - z(t) \| \leqslant \max_{t \leqslant 0} \| \phi(t) - \Gamma(t) \|,$$

其中 $z(t)$ 为方程

$$z'(t) = f[t, z(t), z(t-\tau)], \quad t \geqslant 0, \tag{1.14}$$

$$z(t) = \Gamma(t), \qquad t \leqslant 0, \tag{1.15}$$

之解.

证明 使用引理 1.1, 对 $\forall t \geqslant 0$, (1.12)~(1.13)之解为 $y(t)$, (1.14)~(1.15)之解为 $z(t)$, 则

$$\| y(t) - z(t) \| \leqslant \max\{ \| \phi(0) - \Gamma(0) \|,$$
$$\max_{0 \leqslant x \leqslant t} \{ \gamma(x) \| y(x-\tau) - z(x-\tau) \| / (-\sigma(x)) \} \}.$$

因为 $\gamma(x) \leqslant -\sigma(x)$, 所以

$$\| y(t) - z(t) \| \leqslant \max\{ \| \phi(0) - \Gamma(0) \|,$$
$$\max_{0 \leqslant x \leqslant t} \{ \| y(x-\tau) - z(x-\tau) \| \} \}.$$

上式意味着

$$\| y(t) - z(t) \| \leqslant \max_{t \leqslant 0} \| \phi(t) - \Gamma(t) \|,$$

定理 1.2 证毕.

定理 1.3 考虑如下非线性延时方程:

$$y'(t) = f[t, y(t), y(t-\tau)], \quad t \geqslant 0, \tag{1.16}$$

$$y(t) = \phi(t), \qquad t \leqslant 0, \tag{1.17}$$

其中 f 满足条件(1.7)~(1.8), $\sigma(t)$, $\gamma(t)$ 连续且满足

$$\sigma(t) \leqslant -\beta < 0, \tag{1.18}$$

$$\gamma(t) \leqslant -q\sigma(t), \quad 0 \leqslant q < 1, \tag{1.19}$$

则(1.16)的任意两个解 $y(t)$ 及 $z(t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\|y(t)-z(t)\|=0.$$

证明 令 $Y(t)=\|y(t)-z(t)\|$,类似于引理1.1的推导,我们有

$$Y(t)\leqslant\widetilde{Y}(t),$$

其中 $\widetilde{Y}(t)$满足

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}'(t)&=\sigma(t)\widetilde{Y}(t)+\gamma(t)\widetilde{Y}(t-\tau), & t\geqslant 0,\\ \widetilde{Y}(t)&=\|\phi(t)-\Gamma(t)\|, & t\leqslant 0.\end{aligned}$$

使用第四章中引理6.2,有

$$Y(t)\leqslant\widetilde{Y}(t)\longrightarrow 0,\quad (t\to\infty).$$

定理1.3证毕.

§6.2 *RN* 稳定性及 *GRN* 稳定性

我们用一个数值方法去求解方程

$$y'(t)=f[t,y(t),y(t-\tau)],\quad t\geqslant 0,\tag{2.1}$$

$$y(t)=\phi(t),\quad t\leqslant 0,\tag{2.2}$$

其中 f 满足定理1.2的条件,由于其任意两个精确解 $y(t),z(t)$ 满足

$$\|y(t)-z(t)\|\leqslant\max_{t\leqslant 0}\|\phi(t)-\Gamma(t)\|,$$

那末我们对任意两个数值解也希望有类似的界.

定义 2.1 一个数值方法对于 $\mathrm{DDE_s}$ 被称为是 *RN* 稳定的,当且仅当用此方法去求解(1.12)~(1.13)及(1.14)~(1.15)时,其数值解$\{y_n\},\{z_n\}$对任意的 $n\geqslant 0,h>0,\tau>0$ 满足

$$\|y_n-z_n\|\leqslant\max_{t\leqslant 0}\|\phi(t)-\Gamma(t)\|,\tag{2.3}$$

其中 f 满足条件(1.7)~(1.10),$t_n=nh,mh=\tau,m\geqslant 1$,是某自然数.

定义 2.2 一个数值方法对于解 $\mathrm{DDE_s}$ 被称为是 *GRN* 稳定的,当且仅当用此方法去解(1.12)~(1.13)及(1.14)~(1.15)时其数值解$\{y_n\},\{z_n\}$对任意的 $h>0$ (2.3)式成立.

我们用如下隐式 Euler 公式去解(2.1)~(2.2),得

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}, v_{n+1}), \tag{2.4}$$

其中 v_{n+1}是 $y_{n+1-m+\delta}$的插值逼近,

$$t_{n+1} = (n+1)h, (m-\delta)h = \tau,$$

$$v_{n+1} = \delta y_{n+2-m} + (1-\delta)y_{n+1-m},$$

代入(2.4)得

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}, \delta y_{n+2-m} + (1-\delta)y_{n+1-m}).$$

类似地

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, z_{n+1}, \delta z_{n+2-m} + (1-\delta)z_{n+1-m}).$$

令

$$\varepsilon_n = y_n - z_n, Y_\delta = \delta y_{n+2-m} + (1-\delta)y_{n+1-m},$$
$$Z_\delta = \delta z_{n+2-m} + (1-\delta)z_{n+1-m},$$

于是

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_{n+1}\|^2 &= \|\varepsilon_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}, Y_\delta) - hf(t_{n+1}, z_{n+1}, Z_\delta)\|^2 \\ &= \|\varepsilon_n\|^2 + 2h\mathrm{Re}\langle\varepsilon_n, \Delta f\rangle + h^2\langle\Delta f, \Delta f\rangle,\end{aligned}$$

其中

$$\Delta f = f(t_{n+1}, y_{n+1}, Y_\delta) - f(t_{n+1}, z_{n+1}, Z_\delta).$$

由于 $\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - h\Delta f$,代入上式得

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_{n+1}\|^2 &= \|\varepsilon_n\|^2 + 2h\mathrm{Re}\langle\varepsilon_{n+1}, \Delta f\rangle - h^2\langle\Delta f, \Delta f\rangle \\ &\leqslant \|\varepsilon_n\|^2 + 2h\mathrm{Re}\langle\varepsilon_{n+1}, \Delta f\rangle \\ &= \|\varepsilon_n\|^2 + 2h\mathrm{Re}\langle\varepsilon_{n+1}, f(t_{n+1}, y_{n+1}, Y_\delta) \\ &\quad - f(t_{n+1}, z_{n+1}, Y_\delta)\rangle + 2h\mathrm{Re}\langle\varepsilon_{n+1}, f(t_{n+1}, z_{n+1}, Y_\delta) \\ &\quad - f(t_{n+1}, z_{n+1}, Z_\delta)\rangle \\ &\leqslant \|\varepsilon_n\|^2 + 2h\sigma(t_{n+1})\|\varepsilon_{n+1}\|^2 \\ &\quad + 2h\|\varepsilon_{n+1}\|\gamma(t_{n+1})\|Y_\delta - Z_\delta\| \\ &\leqslant \|\varepsilon_n\|^2 - 2h\gamma(t_{n+1})\|\varepsilon_{n+1}\|^2 \\ &\quad + 2h\|\varepsilon_{n+1}\|\gamma(t_{n+1})\|Y_\delta - Z_\delta\| \\ &= \|\varepsilon_n\|^2 + 2h\|\varepsilon_{n+1}\|\gamma(t_{n+1})[\|Y_\delta - Z_\delta\| - \|\varepsilon_{n+1}\|].\end{aligned}$$

令 $Q_{n+1}=2h\gamma(t_{n+1})$，则

$$\|\varepsilon_{n+1}\|^2\leqslant\|\varepsilon_n\|^2+Q_{n+1}\|\varepsilon_{n+1}\|[\|Y_\delta-Z_\delta\|-\|\varepsilon_{n+1}\|]. \tag{2.5}$$

注意到不等式

$$\|\varepsilon_n\|\leqslant S\quad(S=\max_{t\leqslant 0}\|\phi(t)-\Gamma(t)\|)$$

对于 $n\leqslant 0$ 显然成立.我们用数学归纳法来证明对一切 n，$\|\varepsilon_n\|\leqslant S$.

假设对一切 $n\leqslant j(j\geqslant 0)$ $\|\varepsilon_n\|\leqslant S$.

(i) 如果 $\|\varepsilon_{j+1}\|\leqslant\|\varepsilon_j\|$，则 $\|\varepsilon_{j+1}\|\leqslant S$.

(ii) 如果 $\|\varepsilon_{j+1}\|>\|\varepsilon_j\|$，则(2.5)产生

$$0<\|\varepsilon_{j+1}\|^2-\|\varepsilon_j\|^2\leqslant Q_{j+1}\|\varepsilon_{j+1}\|[\|Y_\delta-Z_\delta\|-\|\varepsilon_{j+1}\|]$$

因为 $Q_{j+1}\geqslant 0$，故

$$\|Y_\delta-Z_\delta\|-\|\varepsilon_{j+1}\|\geqslant 0,$$

换句话说

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_{j+1}\|&\leqslant\|\delta y_{j+2-m}+(1-\delta)y_{j+1-m}-\delta z_{j+2-m}-(1-\delta)z_{j+1-m}\|\\&\leqslant\delta\|\varepsilon_{j+2-m}\|+(1-\delta)\|\varepsilon_{j+1-m}\|\\&\leqslant S\qquad\text{对于 } m\geqslant 2.\end{aligned}$$

所以我们断定，对任一 n

$$\|y_n-z_n\|\leqslant S.$$

定理 2.1 θ 方法对于 $\mathrm{DDE_s}$ 是 *GRN* 稳定的，当且仅当 $\theta=1$.

证明 上面的讨论证明了 $\theta=1$ 时是 *GRN* 稳定的，而 $\frac{1}{2}\leqslant\theta<1$，由第四章定理 6.3 知，不可能是 *GRN* 稳定的.

§6.3 θ 方法的渐近稳定性

考虑如下非线性延时方程

$$y'(t)=f[t,y(t),y(t-\tau)],\quad t\geqslant 0, \tag{3.1}$$

$$y(t)=\phi(t),\qquad t\leqslant 0, \tag{3.2}$$

当 f 满足定理1.3的条件时,(3.1)的任何两个解 $y(t)$,$z(t)$ 必满足

$$\lim_{t\to\infty}\|y(t)-z(t)\|=0.$$

对于(3.1)～(3.2)的数值解,我们完全有理由要求

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-z_n\|=0.$$

定义3.1 一个数值方法,对于 $\mathrm{DDE_s}$ 被称为渐近稳定的,当且仅当用它去求解 f 满足条件(1.7)～(1.8)与(1.18)～(1.19)之方程(3.1),其任意两组解 $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-z_n\|=0,$$

其中 $t_n=nh$,$mh=\tau$,$\tau>0$ 为任意延时量,$m\geqslant 1$ 为某一自然数.

我们来考察 θ 方法的渐近稳定性,令

$$y_{n+1}=y_n+\theta hf(t_{n+1},y_{n+1},y_{n+1-m})+(1-\theta)hf(t_n,y_n,y_{n-m}).\tag{3.3}$$

而 $\{z_n\}$ 满足

$$z_{n+1}=z_n+\theta hf(t_{n+1},z_{n+1},z_{n+1-m})+(1-\theta)hf(t_n,z_n,z_{n-m}).\tag{3.4}$$

令 $v_n=y_n-z_n$,(3.3)与(3.4)相减得

$$\begin{aligned}v_{n+1}=&\ v_n+\theta h[f(t_{n+1},y_{n+1},y_{n+1-m})-f(t_{n+1},z_{n+1},z_{n+1-m})]\\&+(1-\theta)h[f(t_n,y_n,y_{n-m})-f(t_n,z_n,z_{n-m})]\\=&\ v_n+\theta h[f(t_{n+1},y_{n+1},y_{n+1-m})-f(t_{n+1},z_{n+1},y_{n+1-m})]\\&+\theta h[f(t_{n+1},z_{n+1},y_{n+1-m})-f(t_{n+1},z_{n+1},z_{n+1-m})]\\&+(1-\theta)h[f(t_n,y_n,y_{n-m})-f(t_n,z_n,y_{n-m})]\\&+(1-\theta)h[f(t_n,z_n,y_{n-m})-f(t_n,z_n,z_{n-m})],\end{aligned}\tag{3.5}$$

在(3.5)两边分别与 v_{n+1} 作内积,再使用 Schwartz 不等式,得

$$\begin{aligned}\|v_{n+1}\|^2\leqslant&\ \|v_n\|\,\|v_{n+1}\|+\theta h\sigma(t_{n+1})\|v_{n+1}\|^2\\&+\theta h\gamma(t_{n+1})\|v_{n+1-m}\|\cdot\|v_{n+1}\|\\&+(1-\theta)hL\|v_n\|\cdot\|v_{n+1}\|\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$+ (1-\theta)h\gamma(t_n)\|v_{n-m}\|\cdot\|v_{n+1}\|,$$

或者

$$\begin{aligned}\|v_{n+1}\| \leqslant{}& \|v_n\| + \theta h\sigma(t_{n+1})\|v_{n+1}\| \\ &+ \theta h\gamma(t_{n+1})\|v_{n+1-m}\| \\ &+ (1-\theta)hL\|v_n\| + (1-\theta)h\gamma(t_n)\|v_{n-m}\|,\end{aligned}$$

在推导(3.6)式时我们使用了条件(1.7)～(1.8)以及假定 f 关于第二个变量满足双侧 Lipschtz 条件,其常数为 L.

注意到$[1-\theta h\sigma(t_{n+1})]>0$,我们有

$$\|v_{n+1}\| \leqslant \frac{1+(1-\theta)hL}{1-\theta h\sigma(t_{n+1})}\|v_n\| + \frac{\theta h\gamma(t_{n+1})}{1-\theta h\sigma(t_{n+1})}\|v_{n+1-m}\| + \frac{\theta h\gamma(t_n)}{1-\theta h\sigma(t_{n+1})}\|v_{n-m}\|. \tag{3.7}$$

考虑差分方程

$$u_{n+1} = \frac{1+(1-\theta)hL}{1-\theta h\sigma(t_{n+1})}u_n + \frac{\theta h\gamma(t_{n+1})}{1-\theta h\sigma(t_{n+1})}u_{n+1-m} + \frac{\theta h\gamma(t_n)}{1-\theta h\sigma(t_{n+1})}u_{n-m}, \tag{3.8}$$

$$u_n = \|\phi(t_n) - \Gamma(t_n)\|, \quad 当\ n \leqslant 0. \tag{3.9}$$

容易验证

$$\|v_n\| \leqslant u_n, \quad 对\ \forall n \geqslant 0.$$

那末我们要考察 θ 方法的渐近稳定性,仅需考察(3.8)～(3.9)之解 $u_n \to 0(n\to\infty)$的条件.

值得注意的是,差分方程(3.8)～(3.9)与第四章§4.6 中的(6.34)无甚两样,利用上述章节定理 6.3 的证明方法可得

定理 3.1 隐式 Euler 公式($\theta=1$)对于 DDE$_s$ 是渐近稳定的.

§6.4 非自治线性系统的数值处理

考虑如下非自治系统

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \leqslant 0, \tag{4.2}$$

其中 $A(t)=(a_{ij}(t))_{N\times N}$，$B(t)=(b_{ij}(t))_{N\times N}$，$y(t)\in C^N$，$\phi(t)$ 是给定的函数，$\tau>0$ 为常数延时量，$a_{ij}(t)$，$b_{ij}(t)$是 t 的解析函数.

定理 4.1 对于系统(4.1)~(4.2)，如果

$$\frac{1}{2}\lambda_{\max}[A(t)+A^*(t)]=\eta(t)\leqslant-\beta<0, \tag{4.3}$$

$$\|B(t)\|\leqslant-q\eta(t), \qquad 0\leqslant q<1, \tag{4.4}$$

$$\gamma(t)=\|B(t)\|, \tag{4.5}$$

$\eta(t)$是 t 的连续函数(见第五章§5.3(a)式)，$t\in[0,\infty]$；于是(4.1)的任一解 $y(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0.$$

证明 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle A(t)y(t),y(t)\rangle&=\langle\frac{1}{2}(A(t)+A(t)^*)y(t),y(t)\rangle\\&\leqslant\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A(t)+A(t)^*)\|y(t)\|^2,\end{aligned}$$

以及

$$\|B(t)y(t-\tau)\|\leqslant\|B(t)\|\cdot\|y(t-\tau)\|,$$

且 $\eta(t)=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A(t)+A(t)^*)\leqslant-\beta<0$，$\|B(t)\|\leqslant-q\eta(t)$，$0\leqslant q<1$，如果令 $\sigma(t)=\eta(t)$，$\gamma(t)=\|B(t)\|$，它们都是$[0,\infty]$上的连续函数，那末定理 1.3 之条件全部满足，按定理 1.3 之结论有

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0.$$

定理 4.1 证毕.

下面我们将用 θ 方法来求解(4.1)~(4.2)，其中 $A(t)$，$B(t)$ 满足条件(4.3)~(4.5). 我们有如下递推关系：

$$\begin{aligned}y_{n+1}=y_n&+\theta h[A(t_{n+1})y_{n+1}+B(t_{n+1})y_{n-m+1}]\\&+(1-\theta)h[A(t_n)y_n+B(t_n)y_{n-m}],\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant1$，$t_n=nh$，$mh=\tau$，$m\geqslant1$ 是某自然数.

我们仅考虑 $\theta=1$ 之情况，并假定对 $\forall t\in[0,\infty)$，

$A^*(t)A(t) \leqslant A(t)A(t)^*$. 这里 $A \leqslant B$ 意味着对 $\forall x \in C^N$, $\langle Ax, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle$($A, B$ 为 Hermite 矩阵). 此时(4.6)成为

$$y_{n+1} = y_n + \theta hA(t_{n+1})y_{n+1} + \theta hB(t_{n+1})y_{n-m+1}, \quad (4.7)$$

或者

$$y_{n+1} = (I - hA(t_{n+1}))^{-1}y_n + h(I - hA(t_{n+1}))^{-1}B(t_{n+1})y_{n+1-m}, \quad (4.8)$$

此处

$$t_n = nh, n = 0,1,2,\cdots,$$

令

$$A(t) = H_1(t) + \mathrm{i}H_2(t), H_1(t) = (A(t) + A(t)^*)/2,$$
$$H_2(t) = (A(t) - A(t)^*)/2\mathrm{i}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

因为$\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A(t)+A(t)^*) \leqslant -\beta < 0$,我们有 $\lambda_{\min}(-H_1) \geqslant \beta > 0$,从而

$$\|(I - hA(t))^{-1}\|^2 = \|\{[I - hH_1(t)] + \mathrm{i}[I - hH_2(t)]\}^{-1}\|^2$$
$$\leqslant \frac{1}{\min\{\mu:\mu \in \sigma[(I - hH_1(t))^2 + (I - hH_2(t))^2]\}}$$
$$\leqslant \frac{1}{\min\{\mu:\mu \in \sigma[(I - hH_1(t))^2]\}}. \quad (4.9)$$

所以

$$\|(I - hA(t_1))^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 + h\lambda_{\min}(-H_1)}. \quad (4.10)$$

情况(Ⅰ) $m \geqslant 2$.

当 $n=0$,则(4.8)成为

$$y_1 = (I - hA(t_1))^{-1}y_0 + (I - hA(t_1))^{-1}hB(t_1)y_{-m+1},$$
$$\|y_1\| \leqslant \|(I - hA(t_1))^{-1}\|(1 + h\|B(t_1)\|)\max_{t\leqslant 0}\|\phi(t)\|$$
$$\leqslant \frac{1 + qh\lambda_{\min}(-H_1(t_1))}{1 + h\lambda_{\min}(-H_1(t_1))}\max_{t\leqslant 0}\|\phi(t)\|$$
$$\leqslant \frac{1 + qh\beta}{1 + h\beta}\max_{t\leqslant 0}\|\phi(t)\|$$

$$= p \max_{t\leqslant 0} \| \phi(t) \| .$$

当 $n \leqslant m-1$,

$$\| y_{n+1} \| \leqslant p \max_{t\leqslant 0} \| \phi(t) \| .$$

当 $rm \leqslant n \leqslant (r+1)m-1$,用归纳法可以证明(见文献[41])

$$\| y_{n+1} \| \leqslant p^{r+1} \max_{t\leqslant 0} \| \phi(t) \| . \qquad (4.11)$$

情况(Ⅱ) $m=1$.(4.8)成为

$$y_{n+1} = (I - hA(t_{n+1}))^{-1}(I + hB(t_{n+1}))y_n, \quad n = 0,1,2\cdots,$$

从而

$$\| y_{n+1} \| \leqslant \| (I - hA(t_{n+1}))^{-1} \| \cdot \| (I + hB(t_{n+1})) \| \| y_n \|$$
$$\leqslant p \| y_n \|, \quad n = 0,1,2,\cdots. \qquad (4.12)$$

从(4.11)~(4.12)知

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n \| = 0.$$

换句话说,当 $\theta=1$ 时,即隐式 Euler 公式用来求解方程组(4.1)~(4.2)时是渐近稳定的.

§6.5 Runge-Kutta 方法的 *GPN* 稳定及 *GRN* 稳定性

我们先来回忆第四章的定理 6.1 及第六章的引理 1.1,对于常微分方程初值问题

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \geqslant 0, \quad (5.1)$$

此处 $a, y, f:[0,\infty)\to C$, $\mathrm{Re}(a(t))<0$, $\forall t\geqslant 0$. 于是初值问题(5.1)的解满足

$$| y(t) | \leqslant \max\left\{ | y_0 |, \max_{0\leqslant x\leqslant t} | f(x) | / [-\mathrm{Re}(a(x))] \right\}. \qquad (5.2)$$

而对于初值问题

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad y(0) = y_0, \quad t \geqslant 0, \quad (5.3)$$
$$z'(t) = f(t, z(t), v(t)), \quad z(0) = Z_0, \quad t \geqslant 0, \quad (5.4)$$

其中 $f:[0,\infty)\times C^N\times C^N\to C^N$, $y, z, u, v:[0,\infty)\to C^N$,

$$\mathrm{Re}\langle f(t, y_1, u) - f(t, y_2, u), y_1 - y_2\rangle \leqslant \sigma(t) \| y_1 - y_2 \|^2$$

$$\forall t \in [0,\infty), \forall u, y_1, y_2 \in C^N, \tag{5.5}$$

$$\| f(t,y,u_1) - f(t,y,u_2) \| \leqslant \gamma(t) \| u_1 - u_2 \|, \tag{5.6}$$

$$\forall t \in [0,\infty), \forall y, u_1, u_2 \in C^N,$$

$$\sigma(t) < 0, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{5.7a}$$

$$\gamma(t) \leqslant -\sigma(t) \quad \forall t \geqslant 0, \tag{5.7b}$$

于是

$$\| y(t) - z(t) \| \leqslant \max\{ \| y_0 - z_0 \|,$$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant t} \{\gamma(x) \| u(x) - v(x) \| /(-\sigma(x))\}\}.$$

接下去,我们考虑如下延时方程:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t-\tau), \quad t \geqslant 0, \tag{5.8}$$

$$y(t) = \varphi(t), \qquad t \leqslant 0, \tag{5.9}$$

其中 $y, a, b: [0,\infty) \to C$, $\tau > 0$ 为正延时量, $\varphi: (-\infty, 0] \to C$ 是已知函数,

定义 5.1 (5.8)~(5.9)的解 $y(t)$被称为是稳定的(渐近稳定的),倘使对任意的 φ,

$$|y(t)| \leqslant \max_{t \leqslant 0} |\varphi(t)| \tag{5.10}$$

对 $\forall t \geqslant 0$ 成立.

我们早已在第四章 §4.6 中(6.8)指出,如果(5.8)的系数 $a(t), b(t)$满足

$$|b(t)| \leqslant -\mathrm{Re}(a(t)), \qquad \forall t \geqslant 0, \tag{5.11}$$

那末(5.8)~(5.9)的解 $y(t)$满足(5.10),也就是说,此时(5.8)的解是稳定的.

类似地,对于方程

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t \geqslant 0, \tag{5.12}$$

$$y(t) = \phi(t), \qquad t \leqslant 0, \tag{5.13}$$

其中 f 满足条件(5.5)~(5.7),那末正像我们在第六章定理 1.2 指出的那样,如果 $z(t)$满足

$$z'(t) = f(t, z(t), z(t-\tau)), \quad t \geqslant 0, \tag{5.14}$$

$$z(t) = \Gamma(t), \qquad t \leqslant 0, \tag{5.15}$$

那末

$$\| y(t) - Z(t) \| \leqslant \max_{t\leqslant 0} \| \phi(t) - \Gamma(t) \|, \quad \forall t \geqslant 0.$$

也就是说,方程(5.12)此时是稳定的.

弄清楚两类方程的精确解的性质后,我们考虑用 Runge-Kutta 方法去求解(5.8)~(5.9),对于 ODEs

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \geqslant t_0,$$
$$y(t_0) = y_0,$$

用 ν 级(ν-Stage)Runge-Kutta 方法求得 $y_1 \sim y(t_1), t_1 = t_0 + h$ 其中

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{\nu} w_i k_i,$$

$$k_i = f\left(t_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} k_j\right), i = 1, 2, \cdots, v.$$

把上面的公式写成表格形式如下:

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & W^T \end{array},$$

这里 $C = (c_1, c_2, \cdots, c_\nu)^T, W = (w_1, w_2, \cdots, w_\nu)^T, A = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$, $1 \leqslant i, j \leqslant \nu$.

我们再回忆第四章中的 PN, GPN 稳定的概念. 一个数值方法被称为是 GPN 稳定的,倘使用此方法去求解系数满足条件(5.11)的方程(5.8)~(5.9)时数值解 y_n 满足

$$| y_n | \leqslant \max_{t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0} | \varphi(t) |, \quad \forall h > 0, \forall n \geqslant 0. \quad (5.16)$$

注:在(5.8)~(5.9)中的初始时间,这里用 t_0,如果(5.16)在限制条件 $mh = \tau$ 时成立,我们就称此数值方法是 PN 稳定的.

我们再回忆起本章的定义 2.1 及定义 2.2,那里给出了 RN 稳定及 GRN 稳定的概念.

我们用隐式 Runge-Kutta 方法去解(5.8)~(5.9). 一开始,先解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t)\varphi(t-\tau), & t \geqslant t_0, \\ y(t_0) = \varphi(t_0), \end{cases}$$

这里当 $t-\tau \leqslant t_0$ 时，$\varphi(t)$ 是已知函数. 几步后得到在 $t_k = t_0 + H, H = kh \leqslant \tau$ 上的近似值 y_k，我们在节点值 y_k 与 $y_0 = y(t_0) = \varphi(t_0)$ 之间进行插值，得到一个近似解 $\tilde{y}(t)$，它定义在 $[t_0, t_k]$ 上.

那末对以后的少数几步，我们可以重复上面的论述，只要量 $f(t) := b(t)\tilde{y}(t-\tau)$，后面少数几步只要去解 $\mathrm{ODE_s}$ 初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + f(t), & t \geqslant t_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{5.17}$$

假定 $\mathrm{Re}(a(t)) < 0$，及(5.17)有唯一解，根据(5.2)式，我们有

$$|y(t)| \leqslant \max\left\{ |y_0|, \max_{t_0 \leqslant x \leqslant t} \frac{|f(x)|}{-\mathrm{Re}(a(x))} \right\}.$$

定义 5.2 一个 Runge-Kutta 方法说是 AN_f 稳定的，倘使该方法用于求解所有系数 $a(t)$ 满足 $\mathrm{Re}(a(t)) < 0$ 的方程(5.17)时，数值解 y_1 对 $\forall h > 0$, $\forall y_0$, $\forall f$ 满足

$$|y_1| \leqslant \max\left\{ |y_0|, \max_{1 \leqslant i \leqslant \nu} \frac{|f(t_0 + c_i h)|}{-\mathrm{Re}(a(t_0 + c_i h))} \right\},$$

其中

$$y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^{\nu} w_i k_i, \tag{5.18}$$

$$k_i = a(t_0 + c_i h)\Big(y_0 + h\sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} k_j\Big) + f(t_0 + c_i h),$$

$$i = 1, 2, \cdots, \nu. \tag{5.19}$$

定义 5.3 一个 Runge-Kutta 方法是 BN_f 稳定的，当且仅当该方法用于求解(5.3)~(5.4)，f 满足(5.5)~(5.6)，$(\sigma(t)) < 0$，其数值解 y_1 对 $\forall h > 0$, $\forall y_0, z_0$，满足

$$\|y_1 - z_1\| \leqslant \max\Big\{ \|y_0 - z_0\|, \max_{1 \leqslant i \leqslant \nu} \frac{\|\gamma(t_0 + c_i h)[u(t_0 + c_i h) - v(t_0 + c_i h)]\|}{-\sigma(t_0 + c_i h)} \Big\}.$$

下面要考虑的问题是，怎样的 IRK 才是 AN_f 稳定的，或者 BN_f 稳定的. 为此令

$$a_i = a(t_0 + c_i h),$$
$$z_i = h a_i,$$
$$f_i = f(t_0 + c_i h),$$
$$\psi_i = \frac{f_i}{-\mathrm{Re}(a_i)}, \text{因此}, hf_i = -\mathrm{Re}(z_i)\psi_i,$$
$$Y_i = y_0 + h\sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}k_j.$$

我们改写 Runge-Kutta 方法(5.18)～(5.19)为

$$y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^{\nu} w_i k_i,$$
$$k_i = a_i Y_i + f_i.$$

因此

$$y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^{\nu} w_i(a_i Y_i + f_i),$$
$$Y_i = y_0 + h\sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}(a_j Y_j + f_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant \nu.$$

令

$$Z = \mathrm{diag}\{z_1, z_2, \cdots, z_\nu\},$$
$$Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_\nu)^T,$$
$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$
$$u = (1, 1, \cdots, 1)^T,$$
$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_\nu)^T,$$
$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_\nu)^T.$$

于是 Runge-Kutta 方法有如下紧凑形式，

$$y_1 = y_0 + W^T Z Y - W^T \mathrm{Re}(Z)\psi,$$

$$Y = (I - AZ)^{-1}uy_0 - (I - AZ)^{-1}A\mathrm{Re}(Z)\psi.$$

如果$(I-AZ)$可逆,即 Runge-Kutta 在这一步有意义,便得

$$y_1 = (1 + W^T Z(I - AZ)^{-1}u)y_0 - W^T(Z(I - AZ)^{-1}A + I)\mathrm{Re}(Z)\psi.$$

因为

$$Z(I - A)^{-1}A + I = Z((I - A)^{-1}AZ + I)Z^{-1},$$
$$(I - AZ)^{-1}AZ + I = (I - AZ)^{-1},$$

得

$$y_1 = (1 + W^T Z(I - AZ)^{-1}u)y_0 - W^T Z(I - AZ)^{-1}Z^{-1}\mathrm{Re}(Z)\psi.$$

又因为

$$Z(I - AZ)^{-1}Z^{-1} = (I - ZA)^{-1},$$

故

$$y_1 = r(z)y_0 - W^T(I - ZA)^{-1}\mathrm{Re}(Z)\psi, \qquad (5.20)$$

其中 $r(z) = (1 + W^T Z(I - ZA)^{-1}u)$.

定理 5.1 IRK 是 AN_f 稳定的,当且仅当

$$|r(z)| + \| W^T(I - ZA)^{-1}\mathrm{Re}(Z)\|_1 \leqslant 1, \qquad (5.21)$$

对任意 Z,$\mathrm{Re}(z_i)\leqslant 0, 1\leqslant i\leqslant \nu$ 成立.

证明 设 IRK 是 AN_f 稳定的.从(5.20)

$$|y_1| = |r(z)y_0 - W^T(I - ZA)^{-1}\mathrm{Re}(Z)\psi|$$
$$= |(r(z), -W^T(I - ZA)^{-1}\mathrm{Re}(Z))(y_0, \psi^T)^T|.$$

我们定义 $\nu+1$ 维向量

$$l := (r(z), -W^T(I - ZA)^{-1}\mathrm{Re}(Z))^T,$$
$$m := (y_0, \psi^T)^T.$$

因此

$$|y_1| = \left|\sum_{j=1}^{\nu+1} l_j m_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{\nu+1} |l_j||m_j| e^{\mathrm{i}\arg l_j + \mathrm{i}\arg m_j}\right|, \mathrm{i} = \sqrt{-1}, \qquad (5.22)$$

此外 arg l_j 及 arg m_j 分别表示复数 l_j 与 m_j 之幅角. 我们注意到 AN_f 的定义中, y_0, f 之任意性, 我们可以适当选择 m_j, 即 y_0 及 $\psi = f/(-\mathrm{Re}(a))$, 使得 $\arg l_j + \arg m_j$ 是常数, 以及 $|m_j| = 1$. 所以

$$|y_1| = \sum_{j=1}^{\nu+1} |l_j||m_j| = \|l\|_1 \cdot \|m\|_\infty.$$

这样一来

$$|y_1| = \|(r(z), -W^T(I-ZA)^{-1}\mathrm{Re}(Z))\|_1 \cdot \max\left\{|y_0|, \max_{1\leqslant i\leqslant \nu} \frac{|f_i|}{-\mathrm{Re}(a_i)}\right\}.$$

因为 IRK 是 AN_f 稳定的, 故

$$|y_1| \leqslant \max\left\{|y_0|, \max_{1\leqslant i\leqslant \nu} \frac{|f_i|}{-\mathrm{Re}(a_i)}\right\}.$$

故当 $z_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, \nu$

$$\|(r(z), -W^T(I-ZA)^{-1}\mathrm{Re}(Z))\|_1 \leqslant 1,$$

这就是(5.21)式, 因为利用范数的连续性, 上式对 $\mathrm{Re}(z_i) \leqslant 0$ 成立.

相反, 设(5.21)式对一切 $\mathrm{Re}(z_i) \leqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant \nu$ 成立. 从(5.22)

$$|y_1| = \left|\sum_{j=1}^{\nu+1} m_j l_j\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant \nu+1} |m_j| \sum_{j=1}^{\nu+1} |l_j| = \|l\|_1 \cdot \|m\|_\infty.$$

(5.21)意味着 $\|l\|_1 \leqslant 1$, 故

$$|y_1| \leqslant \|m\|_\infty = \max\left\{|y_0|, \max_{1\leqslant i\leqslant \nu} \frac{|f_i|}{-\mathrm{Re}(a_i)}\right\},$$

上式表示 IRK 是 AN_f 稳定的. 定理 5.1 证毕.

我们在前面的章节中已看到, 一个数值方法要去解 $\mathrm{DDE_s}$, 往往要联系着一个插值方法, 而前面的 AN_f 稳定的概念, 也是利用插值而把稳定性问题引出一个 AN_f 稳定的概念. 由于 IRK 方法的特殊性, 我们可考虑如下插值, 我们要求插值的阶与 IRK 方法

的阶一致，我们有理由希望，最后的方法阶不致于降低.

对于 IRK 方法，考虑如下插值过程：

$$u(t_k+\theta h)=y_k+h\sum_{i=1}^{\nu}w_i(\theta)k_i. \tag{5.23}$$

此处连续函数 $w_i(\theta),1\leqslant i\leqslant\nu$ 满足 $w_i(0)=0,w_i(1)=w_i,1\leqslant i\leqslant\nu$. 所以 $u(t_k)=y_k,u(t_{k+1})=y_{k+1}$.

定义 5.4 考虑用一个 AN_f 稳定的 IRK 方法去解(5.17). 一个插值 u 被说成是对该 IRK 方法是 AN_f 稳定的，当且仅当存在常数 $M\geqslant1$，使得

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant1}|u(t_k+\theta h)|\leqslant M\max\left\{|y_k|,\max_{1\leqslant i\leqslant\nu}\frac{|f(t_k+c_ih)|}{-\mathrm{Re}(a(t_k+c_ih))}\right\} \tag{5.24}$$

对任意的 $k\geqslant0$，及任意的 $a(t)$，满足 $\mathrm{Re}(a(t))<0,(t\geqslant t_0)$时成立.

显然，如果 u 是一个线性插值多项式，那末 u 是关于该 IRK 方法的一个 AN_f 稳定的插值，且 $M=1$.

定理 5.2 倘使我们用一个 AN_f 稳定的 IRK 方法，连同一个 AN_f 稳定的插值 u 去解方程(5.8)~(5.9)，于是在点 $t_n=t_0+nh$ 上的近似值 y_n 对任意的 $h>0,\tau>0,n\geqslant0$ 及每一个 φ 满足

$$|y_n|\leqslant\max_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0}|\varphi(t)|, \tag{5.25}$$

这里(5.8)的系数 $a(t),b(t)$满足

$$M|b(t)|\leqslant-\mathrm{Re}(a(t)),\qquad\forall t\geqslant t_0. \tag{5.26}$$

证明 令 $\xi_i=t_0+i\tau,i=1,2,\cdots$. 假定 $t_k<t_0+\tau$，根据 IRK 的 AN_f 稳定性及条件(5.26)，我们有

$$\begin{aligned}|y_k|&\leqslant\max\left\{|y_{k-1}|,\max_{1\leqslant i\leqslant\nu}\frac{|b(t_{k-1}+c_ih)\varphi(t_{k-1}+c_ih-\tau)|}{-\mathrm{Re}(a(t_{k-1}+c_ih))}\right\}\\&\leqslant\max\left\{|y_{k-1}|,\frac{1}{M}\max_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0}|\varphi(t)|\right\}.\end{aligned}$$

由于 $|y_0|=|\varphi(t_0)|\leqslant\max\limits_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0}|\varphi(t)|$，用数学归纳法可得

$$|y_k| \leqslant \max_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0} |\varphi(t)|, \quad k = 0,1,\cdots,N, \qquad (5.27)$$

其中 N 是使得 t_N 位于 $[t_0,\xi_1]$ 之最小正整数.

在每一步,插值 $u(t_k+\theta h)$ 满足(5.24),而对 $k\leqslant N$

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 1} |u(t_k+\theta h)| \leqslant M\max\left\{|y_k|,\right.$$

$$\left.\max_{1\leqslant i\leqslant\nu} \frac{|b(t_k+c_ih)\varphi(t_k+c_ih-\tau)|}{-\mathrm{Re}(a(t_k+c_ih))}\right\}$$

$$\leqslant M\max\left\{|y_k|, \frac{1}{M}\max_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0}|\varphi(t)|\right\},$$

使用(5.27),得

$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant \xi_1} |u(t)| \leqslant M \max_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0} |\varphi(t)|. \qquad (5.28)$$

在下一个区间 $[\xi_1,\xi_2]$,IRK 产生近似解 y_{N+k},使得

$$|y_{N+k}| \leqslant \max\left\{|y_{N+k-1}|,\right.$$

$$\left.\max_{1\leqslant i\leqslant\nu} \frac{|b(t_{N+k-1}+c_ih)u(t_{N+k-1}+c_ih-\tau)|}{-\mathrm{Re}(a(t_{N+k-1}+c_ih))}\right\}$$

$$\leqslant \max\left\{|y_{N+k-1}|, \frac{1}{M}\max_{t_0\leqslant t\leqslant \xi_1}|u(t)|\right\}.$$

利用(5.28),有

$$|y_{N+k}| \leqslant \max\left\{|y_{N+k-1}|, \max_{t_0-\varphi\leqslant t\leqslant t_0} |\tau(t)|\right\}.$$

从(5.27),

$$|y_N| \leqslant \max_{t_0-\tau\leqslant t_0} |\varphi(t)|,$$

使用数学归纳法,得

$$|y_{N+k}| \leqslant \max_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0} |\varphi(t)|,$$

其中 $k=1,2,\cdots$,使得 t_{N+k} 位于 $[\xi_1,\xi_2]$.

关于 $[\xi_1,\xi_2]$ 上的插值 $u(t)$,与前面一样论证,得

$$\max_{\xi_1\leqslant t\leqslant \xi_2} |u(t)| \leqslant M \max_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0} |\varphi(t)|.$$

在以后的区间中,我们可用同样的方法论证,故

$$|y_n| \leqslant \max_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0} |\varphi(t)|, \qquad n = 0,1,2,\cdots.$$

定理 5.2 证毕.

推论 5.3 一个 AN_f 稳定的方法连同一个 $M=1$ 的 AN_f 稳定的插值 u,对于 DDE_s 是 GPN 稳定的.

对于非线性延时方程

$$y'(t) = f[t, y(t), y(t-\tau)], \qquad t \geqslant t_0,$$
$$y(t) = \phi(t), \qquad t \leqslant t_0.$$

类似于本节一开始对线性情况的说明,可以考虑一个常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), p(t)), & t \geqslant t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{5.29}$$

其中 $p(t)$是已知函数.那末用 IRK 去求解(5.29)时得

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + h\sum\limits_{i=1}^{\nu} w_i k_i, \\ k_i = f(t_0) + c_i h, y_0 + h\sum\limits_{j=1}^{\nu} a_{ij} k_j, p(t_0 + c_i h). \end{cases} \tag{5.30}$$

对应的插值 $u(t)$定义为

$$u(t_0 + \theta h) = y_0 + h\sum_{i=1}^{\nu} w_i(\theta) k_i, \tag{5.31}$$

其中 $w_i(\theta)$为 θ 之连续函数,满足 $w_i(0)=0, w_i(1)=w_i, 1\leqslant i\leqslant \nu$.所以 $u(t_0)=y_0, u(t_1)=y_1$.

定义 5.5 一个插值(5.31)的 u 被称为关于 IRK 是 BN_f 稳定的,当且仅当

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 1} \| u(t_0 + \theta h) - v(t_0 + \theta h) \| \leqslant \max\{ \| y_0 - z_0 \|, \max_{1\leqslant i\leqslant \nu} \| \phi_i \| \},$$

其中

$$\phi_i = \frac{r(t_0 + c_i h)[p(t_0 + c_i h) - q(t_0 + c_i h)]}{-\sigma(t_0 + c_i h)},$$

$v(t)$是准对方程

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), q(t)), & t \geqslant t_0, \\ z(t_0) = z_0, & t \leqslant t_0 \end{cases}$$

的插值,f 满足(5.5),(5.6)及(5.7a).

定理 5.4 倘使用一个 BN_f 稳定的 IRK 方法连同一个 BN_f 稳定的插值去求解方程

$$\begin{aligned} y'(t) &= f[t, y(t), y(t-\tau)], \qquad & t \geqslant t_0, \\ y(t) &= \phi(t), & t \leqslant t_0, \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} z'(t) &= f[t, z(t), z(t-\tau)], \qquad & t \geqslant t_0, \\ z(t) &= \Gamma(t), & t \leqslant t_0. \end{aligned}$$

于是在点 $t_n = t_0 + nh$ 上的近似值 y_n 及 z_n，对任意的 $h>0, \tau>0$, $n \geqslant 0$ 及每一个 ϕ 及 Γ 满足

$$\| y_n - z_n \| \leqslant \max_{t_0-\tau \leqslant t \leqslant t_0} \| \phi(t) - \Gamma(t) \| .$$

所以该数值方法 GRN 稳定的，这里 f 满足 $|\gamma(t)| \leqslant -\sigma(t)$，对 $\forall\, t \geqslant t_0$.

这个定理的证明与定理 5.2 的证明是类似的(参看文献[48]).我们省略这个证明.为了获得 GRN 稳定的 IRK 方法，必须先寻找 BN_f 稳定的隐式 Runge-Kutta 方法，BN_f 稳定的一组条件可在文献[48]中找到.而文献[48]中只给出一个例子，

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

它是二阶的，可以证明它是 AN_f 稳定的.详情请见参考文献[48].

第七章 中立型方程的数值处理

§7.1 引言

中立型微分方程（neutral differential equations）常常出现于各种应用科学的领域中，例如电力网络中的能量耗损就是归结为满足这种方程，这一章我们将考虑一类十分一般的中立型微分方程组的数值处理．在§7.3中，我们将给出这类方程的理论解为渐近稳定的充分必要条件．§7.2中考虑用单参数方法求其数值解，§7.4中考虑该数值方法的稳定性区域的特征，§7.5中考虑用隐式 Runge-Kutta 方法求解中立型方程．

早在1967年 Brayton 等人曾讨论一类较为特殊的中立型方程的数值处理．1984，Jackiewicz 曾对复系数中立型方程研究其理论解及数值解．这里考虑一般的方程组

$$y'(t) = Ay'(t-\tau) + By(t) + Cy(t-\tau), \quad t \geqslant 0, \quad (1.1)$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \leqslant 0, \quad (1.2)$$

其中 A,B,C 是 N 阶复阵，$\tau>0$ 为常数延时量，$\phi(t)$ 为给定的初始函数，$y(t) \in C^N$ 为未知函数．

§7.2 单参数方法及其数值稳定性

我们用如下单参数方法去解(1.1)～(1.2)，

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n &+ Ay^h((n+1)h-\tau) - Ay^h(nh-\tau) \\ &+ hB[\theta y_{n+1} + (1-\theta)y_n] \\ &+ hC[\theta y^h((n+1)h-\tau) + (1-\theta)y^h(nh-\tau)], \end{aligned} \quad (2.1)$$

此处 $\theta \in [0,1]$，$n=0,1,2,\cdots$，$y_0=\phi(0)$，$y^h(t)=\phi(t)$（当 $-\tau \leqslant t \leqslant 0$），而 $y^h(t)$ 当 $t>0$ 时采用线性插值

$$\begin{cases} y^h(nh-\tau) = \delta y_{n+1-m} + (1-\delta)y_{n-m}, \\ y^h((n+1)h-\tau) = \delta y_{n+2-m} + (1-\delta)y_{n+1-m}. \end{cases} \quad (2.2)$$

代入(2.1),得

$$(I-\theta\bar{B})y_{n+1}=[I+(1-\theta)\bar{B}]y_n+\delta(A+\theta\bar{C})y_{n+2-m}$$
$$+[(1+\delta)(A+\theta\bar{C})-\delta(A-(1-\theta)\bar{C})]y_{n+1-m}$$
$$-(1-\delta)[A-(1-\theta)\bar{C}]y_{n-m}. \tag{2.3}$$

此处 $n\geqslant m,(m-\delta)h=\tau,\bar{B}=hB,\bar{C}=hC,y_{-n}=\phi(t_n)$.

定义 2.1 令$(A,\bar{B},\bar{C})$是给定的 N 阶复阵族,$0\leqslant\delta<1$. 过程(2.3)被称为在$(A,\bar{B},\bar{C})$处 δ 稳定的,当且仅当

(i) $I-\theta\bar{B}$ 可逆,

(ii) 任何满足(2.3)之解$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

令 $\delta\in[0,1)$,$(A,\bar{B},\bar{C})$为给定复阵,定义

$$p(z,\delta)=(\delta z+(1-\delta))((z-1)A+(\theta z+(1-\theta))\bar{C}),$$
$$Q(z)=(I-\theta\bar{B})z-(I+(1-\theta)\bar{B}).$$

那末(2.3)在$(A,\bar{B},\bar{C})$是 δ 稳定的,当且仅当

$$(I-\theta\bar{B})\text{ 是可逆的,} \tag{2.4a}$$
$$\det[z^mQ(z)-p(z,\delta)]=0\Rightarrow|z|<1,\forall m\geqslant1. \tag{2.4b}$$

根据第四章定理 4.2 知道,(2.4)成立,当且仅当

$$I-\theta\bar{B}\text{ 可逆,当 }|z|\geqslant1\text{ 时 }Q(z)\text{ 可逆,}$$
$$\sup_{|z|=1}\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]\leqslant1, \tag{2.5a}$$
$$\det[z^mQ(z)-p(z,\delta)]\neq0,\quad\text{当 }|z|=1,$$
$$\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]=1,m\geqslant1. \tag{2.5b}$$

故有

引理 2.2 过程(2.3)在$(A,\bar{B},\bar{C})$处 δ 稳定的,当且仅当(2.5a)~(2.5b)成立.

令

$$S_\theta^*=\left\{\zeta:\left|\frac{1+(1-\theta)\zeta}{1-\theta\zeta}\right|<1\right\},\Gamma_\theta=\left\{\zeta:\left|\frac{1+(1-\theta)\zeta}{1-\theta\zeta}\right|=1\right\}.$$

那末从第五章引理 2.3 可得

引理 2.3 下列条件(a)与(b)是等价的:

(a) $\sigma[\bar{B}]\subseteq S_\theta^*$,

(b) $(I-\theta\bar{B})$可逆，当$|z|\geqslant 1$时$Q(z)$可逆.

引理 2.4 设$\sigma[\bar{B}]\subseteq S_\theta^*$.于是对一切$\delta\in[0,1)$，有

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{|z|=1\\ \theta z+(1-\theta)\neq 0}} \rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)] \leqslant \operatorname*{Sup}_{\zeta\in\Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-\bar{B})^{-1}(\zeta A+\bar{C})],$$

$$\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]\leqslant\rho(A),\quad |z|=1,\theta z+(1-\theta)=0.$$

进而，若$\delta=0$，则上面的不等式成为等式.

证明 对$|z|=1,\theta z+(1-\theta)\neq 0$时，有

$$\begin{aligned}\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]&=|\delta z+(1-\delta)|\rho\Big[\Big(\frac{z-1}{\theta z+(1-\theta)}I-\bar{B}\Big)^{-1}\\&\qquad\Big(\frac{z-1}{\theta z+(1-\theta)}A+\bar{C}\Big)\Big]\\&\leqslant\rho\Big[\Big(\frac{z-1}{\theta z+(1-\theta)}I-\bar{B}\Big)^{-1}\Big(\frac{z-1}{\theta z+(1-\theta)}A+\bar{C}\Big)\Big].\end{aligned}$$

上面的不等式$\delta=0$时成为等式.

容易验证

$$\Big\{\zeta=\frac{z-1}{\theta z+(1-\theta)},\theta z+(1-\theta)\neq 0\Big\}\Leftrightarrow$$
$$\Big\{z=\frac{1+(1-\theta)\zeta}{1-\theta\zeta},1-\theta\zeta\neq 0\Big\}.$$

所以

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{|z|=1\\ \theta z+(1-\theta)\neq 0}} \rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)] \leqslant \operatorname*{Sup}_{\zeta\in\Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-\bar{B})^{-1}(\zeta A+C)].$$

进而$\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]\leqslant\rho[A]$（当$\theta z+(1-\theta)=0$），且当$\delta=0$时成为等式.引理 2.4 证毕.

引理 2.5 设$\sigma[\bar{B}]\subseteq S_\theta^*$.于是

$$\begin{aligned}&\rho[(\zeta I-\bar{B})^{-1}(\zeta A+\bar{C})]\\&\leqslant\max\{\rho[A],\operatorname*{Sup}_{\zeta\in\Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-\bar{B})^{-1}(\zeta A+\bar{C})]\end{aligned}$$

对任意的$\zeta\in S_\theta^*$成立.

证明 因为$(\zeta I-\bar{B})^{-1}(\zeta A+\bar{C})$的特征值是$\zeta$的代数函数，使用最大模原理便得引理 2.5.

联合引理 2.2,2.3 和 2.4 我们容易看出

定理 2.6 设 $\sigma[\bar{B}]\subseteq S_\theta^*$，$\sup\limits_{\zeta\in\Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-\bar{B})(\zeta A+\bar{C})]<1$ 和 $\rho[A]<1$，于是过程(2.3)在$(A,\bar{B},\bar{C})$处是 δ 稳定的.

§7.3 方程(1.1)解的渐近性质

令 A,B 和 C 是 $N\times N$ 复阵，我们建立下面的重要定理.

定理 3.1 令 $\|A\|<1$. 于是(1.1)的一切精确解 $y(t)$对任意的 $\tau>0$ 满足 $y(t)\to 0(t\to\infty)$，当且仅当

$$\lambda\in\sigma[B]\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0, \tag{3.1a}$$

$$\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]<1,\text{对 }\forall\mathrm{Re}(\zeta)=0,\zeta\neq 0, \tag{3.1b}$$

$$-1\overline{\in}\sigma[B^{-1}C]. \tag{3.1c}$$

其中 $\|A\|=\sup\limits_{\|\xi\|=1}\|A\xi\|$，$\|\xi\|^2=\langle\xi,\xi\rangle$，$\xi\in C^N$.

证明 由于中立型方程的特征根有可能以 $\pm i\infty$为聚点，例如文献[22]中指明，尽管(1.1)的特征根 ζ 满足 $\mathrm{Re}(\zeta)<0$，但仍然会产生(1.1)的解 $y(t)$无界$(t\to\infty)$. 因此，按照 Miranker[33]的结论，如果

$$\det[\zeta I-B-e^{-\zeta\tau}(\zeta A+C)]=0\Rightarrow\mathrm{Re}(\zeta)\leqslant-r<0,$$

那末(1.1)之解是渐近稳定的，即

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0.$$

为此，我们首先指明

$$\det[\zeta I-B-e^{-\zeta\tau}(\zeta A+C)]=0\Rightarrow\mathrm{Re}(\zeta)<0. \tag{3.2}$$

令

$$S_{\frac{1}{2}}^*=\left\{\zeta:\left|\frac{1+\frac{1}{2}\zeta}{1-\frac{1}{2}\zeta}\right|<1\right\},$$

$$\Gamma_{\frac{1}{2}}=\left\{\zeta:\left|\frac{1+\frac{1}{2}\zeta}{1-\frac{1}{2}\zeta}\right|=1\right\}.$$

从(3.1a),我们有 $\sigma[B]\subseteq S^*_{\frac{1}{2}}$. 若 $\mathrm{Re}(\zeta)>0$,则 $\zeta\in S^*_{\frac{1}{2}}$. 从引理 2.5 得

$$\begin{aligned}&\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]\\ \leqslant\ &\max\{\rho[A],\sup_{\zeta\in\Gamma_{\frac{1}{2}}}\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]\}\end{aligned}$$

对任意的 ζ, $\mathrm{Re}(\zeta)\geqslant 0$ 成立.

因为 $\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]$ 是关于 ζ 在 $\{\zeta:\mathrm{Re}(\zeta)=0\}$ 上的连续函数,从(3.1b)知

$$\sup_{\zeta\in\Gamma_{\frac{1}{2}}}\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]\leqslant 1.$$

从而对任意的 ζ, $\mathrm{Re}(\zeta)\geqslant 0$,我们有

$$\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]\leqslant 1,\qquad \forall\,\mathrm{Re}(\zeta)\geqslant 0.$$

再使用如下等价条件

$$\begin{aligned}&\det[\zeta I-B-\mathrm{e}^{-\zeta\tau}(\zeta A+C)]=0\iff\\ &\mathrm{e}^{\zeta\tau}\in\sigma[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)],\quad \forall\,\mathrm{Re}(\zeta)\geqslant 0,\end{aligned}$$

就容易证明(3.2)成立.

下面我们将指明 $\det[\zeta I-B-\mathrm{e}^{-\zeta\tau}(\zeta A+C)]$ 之零点是一致地离开虚轴的. 如果

$$\det[\zeta I-B-\mathrm{e}^{-\zeta\tau}(\zeta A+C)]=0,$$

则存在单位向量 $\xi\in C^N$,使得

$$\{\zeta I-B-\mathrm{e}^{-\zeta\tau}(\zeta A+C)\}\xi=0,\tag{3.3}$$

在上式两边都与 ξ 作内积,得

$$\langle\xi,\xi\rangle\zeta-\langle B\xi,\xi\rangle-\mathrm{e}^{-\zeta\tau}\langle A\xi,\xi\rangle\zeta-\mathrm{e}^{-\zeta\tau}\langle C\xi,\xi\rangle=0.$$

令 $a=\langle A\xi,\xi\rangle$, $b=\langle B\xi,\xi\rangle$, $c=\langle C\xi,\xi\rangle$,于是 $|a|\leqslant\|A\|<1$ 以及

$$\zeta-b-a\zeta\mathrm{e}^{-\zeta\tau}-c\mathrm{e}^{-\zeta\tau}=0.$$

考虑函数

$$g(\zeta)=\zeta-b-a\zeta\mathrm{e}^{-\zeta\tau}-c\mathrm{e}^{-\zeta\tau},$$

于是 $g(\zeta)$ 在全平面上解析,因此在任何有限平面内不能有聚点. 假设有序列 $\{w_n\}$, $|w_n|\to\infty\,(n\to\infty)$ 使得 $g(\mathrm{i}w_n)\to 0\,(n\to\infty)$.

对于充分大的 n,我们有

$$|g(\mathrm{i}w_n)| \geqslant (1-|a|) > 0,$$

因为我们能改写 $g(\zeta)$为

$$g(\zeta) = \zeta(1-a\mathrm{e}^{-\zeta\tau})(1+O(|\zeta|)), \ |\zeta| \to \infty.$$

但这与$|g(\mathrm{i}w_n)|\to 0(n\to\infty)$是矛盾的.从而指明了$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$(对任意的 $\tau>0$).

相反,对任意的 $\tau>0$,(1.1)的一切解 $y(t)$满足 $y(t)\to 0(t\to\infty)$,我们来证明条件(3.1a),(3.1b)以及(3.1c)成立.对任意的解 $y(t)\to 0(t\to\infty)$,仅当对任意的 $\tau>0$,

$$(*) \quad \det[\zeta I - B - \mathrm{e}^{-\zeta\tau}(\zeta A + C)] = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\zeta) < 0.$$

先来证明$\forall \lambda \in \sigma[B] \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$.假设不真,于是存在 $\lambda \in \sigma[B]$使得 $\mathrm{Re}(\lambda)>0$.令Σ表示以 λ 为中心的正向圆周,且当 $\zeta \in \Sigma$时,$\mathrm{Re}(\zeta)>0$ 以及$(\zeta I - B)$可逆.我们只要让Σ的半径充分小,上面的要求完全可以达到.对任意的解析函数,它在Σ上连续且非零,我们用$[\arg f(\zeta)]_\Sigma$来表示 $f(\zeta)$当 ζ 绕Σ一周时的幅角增量,因为Σ是闭曲线,那末$[\arg f(\zeta)]_\Sigma$是 2π 的整数倍.令 $\tau>0$ 充分大,使得 $\zeta \in \Sigma$时,$\rho[\mathrm{e}^{-\zeta\tau}(\zeta I - B)^{-1}(\zeta A + C)]<1$.设 $\alpha \in [0,1]$定义

$$h_\alpha(\zeta) = \det[I - \alpha\mathrm{e}^{-\zeta\tau}(\zeta I - B)^{-1}(\zeta A + C)],$$

因为对所有 $\zeta \in \Sigma, \alpha \in [0,1], h_\alpha(\zeta) \neq 0$,故可以定义 $h_\alpha(\zeta)$的幅角增量$[\arg h_\alpha(\zeta)]_\Sigma$,且是 2π 的整数倍,而

$$[\arg h_\alpha(\zeta)]_\Sigma = \frac{1}{\mathrm{i}}\int_\Sigma \{h'_\alpha(\zeta)/h_\alpha(\zeta)\}\mathrm{d}\zeta,$$

显然它是 α 的连续函数,所以在$[0,1]$上一致连续,那末

$$[\arg h_1(\zeta)]_\Sigma = [\arg h_0(\zeta)]_\Sigma = 0,$$

从而

$$\{\arg\det[I - \mathrm{e}^{-\zeta\tau}(\zeta\tau - B)^{-1}(\zeta A + C)]\}_\Sigma = 0,$$

即

$$\{\arg\det[\zeta I - B - \mathrm{e}^{-\zeta\tau}(\zeta A + C)]\}_\Sigma = [\arg\det[\zeta I - B]]_\Sigma.$$

因为 $\det[\zeta I-B]$在Σ内部有一零点 λ,按照幅角原理,$\det[\zeta I-B-e^{-\zeta\tau}(\zeta A+C)]$在$\Sigma$内部至少有一个零点,但这与(*)是违背的.从而$\forall\lambda\in\sigma[B]\Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda)\leqslant 0$.

从(*)及等价条件

$$\det[\zeta I-B-e^{-\zeta\tau}(\zeta A+C)]=0$$
$$\Leftrightarrow e^{\zeta\tau}\in\sigma[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)],$$

我们有

(a) $\mu\in\sigma[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]\Rightarrow|\mu|\neq 1,$

当 $\mathrm{Re}(\zeta)=0,\zeta\neq 0$,及 $\zeta\in\sigma[B]$.

进而

(b) $\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]\to\rho[A]$,当 $\zeta\to\infty$.

最后,若 $\lambda\in\sigma[B]$,则 $\mathrm{Re}(\lambda)=0$. 我们考虑多项式 $p(\mu,\zeta)=\det[\mu(\zeta I-B)-(\zeta A+C)]$. 假设存在正常数 $\varepsilon,k>0$,使得当$|\zeta-\lambda|\leqslant\varepsilon$ 时,$p(\mu,\zeta)$之一切零点满足$|\mu|\leqslant k$,那末能够验证 $p(\mu,\lambda)\equiv 0$,但这与(*)是矛盾的.从而

(c) $\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]\to\infty$,当 $\zeta\to\lambda$.

因为 $\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]$是 ζ 在$\zeta\in\{\zeta:\mathrm{Re}(\zeta)=0\}$上的连续函数,从(a),(b)及(c)得到$\forall\lambda\in\sigma[B]\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0$. 利用连续函数的介值定理,从(a),(b)及 $\rho[A]<1$,便得

$$\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]<1 \qquad \text{当 } \mathrm{Re}(\zeta)=0,\zeta\neq 0.$$

(3.1c)是容易验证的.定理 3.1 证毕.

推论 3.2 对任意的 $\tau>0$,方程(1.1)($A=0$)的精确解 $y(t)\to 0(t\to\infty)$,当且仅当

(i) $\forall\lambda\in\sigma[B]\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0,$

(ii) $\rho[(\zeta I-B)^{-1}C]<1,\qquad$ 当 $\mathrm{Re}(\zeta)=0,\zeta\neq 0,$

(iii) $-1\,\overline{\in}\,\sigma[B^{-1}C]$.

推论 3.3 令 A,B 和 C 为实对称阵. 若 $I\pm A,-B\pm C$ 是正定的,于是,对任意 $\tau>0$,(1.1)的精确解 $y(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0.$$

证明 从 $I\pm A,-B\pm C$ 是正定阵，我们得

$$\rho[A]=\|A\|<1, \tag{3.4}$$

$$-1\overline{\in}\sigma[B^{-1}C], \tag{3.5}$$

$$\lambda\in\sigma[B]\Rightarrow\lambda<0. \tag{3.6}$$

设 $\mu\in\sigma[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)],(\mathrm{Re}(\zeta)=0,\zeta\neq0)$. 于是存在 $\xi\in\mathbf{C}^N,\|\xi\|=1$,使得

$$(\mu\zeta I-\mu B-\zeta A-C)\xi=0.$$

上式两边与 ξ 作内积，再令 $a=\langle A\xi,\xi\rangle,b=\langle B\xi,\xi\rangle,c=\langle C\xi,\xi\rangle$,得

$$\mu\zeta-\mu b-\zeta a-c=0,$$

其中 $|a|\leqslant\|A\|<1,|c|<-b$,从而

$$|\mu|^2=\frac{c^2+|a|^2|\zeta|^2}{b^2+|\zeta|^2}<1,\quad (对\ \mathrm{Re}(\zeta)=0,\zeta\neq0).$$

从而定理 3.1 之条件全部满足.

推论 3.4 倘使(1.1)之系数($A=0$)满足

$$\|c\|<-\frac{1}{2}\lambda_{\max}(B+B^*),$$

则(1.1)之精确解 $y(t)$ 满足 $y(t)\to0(t\to\infty)$.

证明略.

§7.4 数值稳定性区域的特征

这一节，我们将研究单参数方法(2.1)的数值稳定性区域的性质. 按照定理 3.1,下面定义的集合 H 是有意义的. 令

$$H=\{(A,\bar{B},C):A,\bar{B},\bar{C}\in\mathbf{C}^N,\sigma[B]\subseteq\mathbf{C}^-,\|A\|<1\ 及\ \sup_{\mathrm{Re}(\zeta)=0}P[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+C)]<1\},$$

显然，如果 $(A,\bar{B},\bar{C})\in H$,那末定理 3.1 表明系统(1.1)是渐近稳定的，即

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0.$$

再令

$$S_\delta(\theta)=\{(A,\bar{B},\bar{C}):过程(2.3)在(A,\bar{B},\bar{C})处是\ \delta\ 稳定的\},$$

$$S(\theta) = \prod_{0 \leqslant \delta < 1} S_\delta(\theta).$$

定理 4.1 单参数方法(2.1)对于 $\mathrm{NDE_s}$ 被称为是 *NP* 稳定的，当且仅当

$$H \subseteq S_0(\theta),$$

单参数方法(2.1)对于 $\mathrm{NDE_S}$ 被称为是 *NGP* 稳定的，当且仅当

$$H \subseteq S(\theta).$$

定理 4.2 令 $A, \bar{B}, \bar{C}$ 是 N 阶复阵，于是

$$S_0(\theta) = S(\theta),$$

换句话说，单参数方法(2.1)对于 $\mathrm{DDE_s}$ 是 *NGP* 稳定的，当且仅当它是 *NP* 稳定的.

证明 令$(A, \bar{B}, \bar{C}) \in S_0(\theta)$. 按引理 2.2，对 $\delta = 0$，(2.5a)，(2.5b)成立. 因为 $|\delta z + (1-\delta)| \leqslant 1$ 对任意的 $|z| = 1$ $\delta \in [0,1)$ 成立，从而

$$\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)] \leqslant \rho[Q(z)^{-1}p(z,0)], \quad \forall\ |z| = 1, 0 \leqslant \delta < 1. \tag{4.1}$$

因此(2.5a)对任意的 $0 \leqslant \delta < 1$ 成立.

假设(2.5b)对某些 $\delta \in (0,1)$ 不成立. 亦即对 $\forall\, m \geqslant 1$，$|z| = 1$，$\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)] = 1$ 时 $\det[Q(z)z^m - p(z,\delta)] = 0$. 再从(4.1)及(2.5a)($\delta = 0$)得

$$1 = \rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)] \leqslant \rho[Q(z)^{-1}p(z,0)] \leqslant 1.$$

上式蕴含着 $|\delta z + (1-\delta)| = 1$，从而 $z = 1$. 由前面假定，有

$$\det[Q(z)z^m - p(z,\delta)] = \det[Q(1) - p(1,\delta)] = 0,$$

由行列式关于 δ 的连续性，得

$$\det[Q(1) - p(1,0)] = 0.$$

但这与(2.5b)($\delta = 0$)是矛盾的. 从而(2.5b)对 $\forall \delta \in [0,1)$ 成立. 再次使用引理 2.2，便得如下蕴含关系

$$(A, \bar{B}, \bar{C}) \in S_0(\theta) \Rightarrow (A, \bar{B}, \bar{C}) \in S(\theta).$$

从而 $S_0(\theta) = S(\theta)$. 定理 4.2 证毕.

定理 4.3 单参数方法(2.1)是 *NGP* 稳定的，当且仅当

$\theta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

证明 令 $\theta\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, $\bar{B}=\mathrm{diag}\{-2/(1-2\theta),\cdots,-2/(1-2\theta)\}$, $A=\bar{C}=\varepsilon I$, $\varepsilon>0$ 充分小. 于是

$$\sup_{\zeta\in\Gamma_{\frac{1}{2}}}\rho[(\zeta I-\bar{B})^{-1}(\zeta A+\bar{C})]<1,$$

导致 $(A,\bar{B},\bar{C})\in H$, 但容易验证, 当 $z=-1$ 时, $\det[Q(z)]=0$, 按照引理 2.2, $H\not\subseteq S(\theta)$. 于是过程(2.3), 也就是单参数方法(2.1)对 $\mathrm{NDE_s}$ 不是 NGP 稳定的.

令 $\theta=\frac{1}{2}$. 设 $(A,\bar{B},\bar{C})\in H$, 于是 $\sigma[\bar{B}]\subseteq S_\theta^*=S_{\frac{1}{2}}^*$. 按照引理 2.3, $(I-\theta\bar{B})$ 可逆; $|z|\geqslant 1$ 时 $Q(z)$ 可逆. 从引理 2.4, 对任意的 $\delta\in[0,1)$, 我们有

$$\sup_{|z|=1}\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]$$
$$\leqslant\max\{\rho[A],\sup_{\zeta\in\Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-\bar{B})^{-1}(\zeta A+\bar{C})]\}<1.$$

从引理 2.2 立刻得到 $H\subseteq S(\theta)$.

令 $\theta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, 设 $(A,\bar{B},\bar{C})\in H$. 于是 $\sigma[\bar{B}]\leqslant S_\theta^*$. 从引理 2.3 知 $(I-\bar{B})$ 可逆; $|z|\geqslant 1$ 时 $Q(z)$ 可逆. 另外, 假设 $\zeta\in\Gamma_\theta$, 可知 $\mathrm{Re}(\zeta)\geqslant 0$, 从而 $\zeta\overline{\in}S_{\frac{1}{2}}^*$. 从引理 2.5, 我们有

$$\rho[(\zeta I-\bar{B})^{-1}(\zeta A+\bar{C})]\leqslant\max\{\rho[A],$$
$$\sup_{\zeta\in\Gamma_{\frac{1}{2}}}\rho[(\zeta I-A)^{-1}(\zeta A+\bar{C})]\},$$
$$\forall\zeta\in\Gamma_\theta.$$

从而

$$\sup_{\zeta\in\Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-B)^{-1}(\zeta A+\bar{C})]<1.$$

再从引理 2.4, 对任意的 $\delta\in[0,1)$, 有

$$\sup_{|z|=1}\rho[Q(z)^{-1}p(z,\delta)]$$
$$\leqslant\max\{\rho[A];\sup_{\zeta\in\Gamma_\theta}\rho[(\zeta I-\bar{B})^{-1}(\zeta A+\bar{C})]\}<1.$$

于是从引理2.2知单参数方法(2.1)是 NGP 稳定的.定理4.3证毕.

§7.5 用隐式 Runge-Kutta 方法求解中立型方程

在前面几节我们讨论了单参数方法求解中立型延时微分系统，并仔细地分析了此方法的稳定性质. 这一节，我们用隐式 Runge-Kutta 方法求解这种系统，并详细分析其数值稳定性. 考虑如下方程的初值问题：

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau), y'(t-\tau)), t \geqslant 0, \quad (5.1)$$

$$y(t) = g(t), \quad t \leqslant 0, \quad (5.2)$$

这里 $\tau > 0$ 是延时量，$f: R \times C^d \times C^d \times C^d \rightarrow C^d$ 是给定的向量值函数，$g(t)$是给定的初始函数，$y(t)$为未知函数($t>0$).

为了研究隐式 Runge-Kutta 方法(IRK 方法)的数值稳定性，我们将用 IRK 方法去求解下列试验方程组，且观察其稳定性质.

$$y'(t) = Ly(t) + My(t-\tau) + Ny'(t-\tau), t \geqslant 0, \quad (5.3)$$

$$y(t) = g(t), \quad t \leqslant 0, \quad (5.4)$$

这里 $\tau > 0$ 为常数延时量 L, M 和 N 为 $C^{d \times d}$ 中的常数矩阵. 用 IRK 方法求解(5.3)～(5.4)至今只有少量的文献发表. 具体可参考文献[37].

对于方程(5.3)的渐近稳定性质，文献[22]已有详细的研究. 这一节，我们再给出一个充分必要条件及一个有用的充分条件. 令

$$F(z, \omega) = \det[zI_d - (L + \omega^{-1}(zN + M))], \quad \omega \neq 0, \quad (5.4)$$

于是方程(5.3)的特征方程便是 $F(z, e^{z\tau}) = 0$(见本章§7.3). 方程(5.3)的任一解 $y(t)$满足 $y(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$的充分条件为

$$F(z, e^{z\tau}) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(z) \leqslant -r < 0.$$

文献[22](或本章§7.3)已指明，当 $\|N\| < 1$ 时，(5.3)为渐近稳定的充要条件为

(S) 对 $\forall z, \operatorname{Re}(z) \geqslant 0, \tau > 0 \Rightarrow F(z, e^{z\tau}) \neq 0$.

在本章§7.3中还指明如下定理：

定理 5.1[22] 令 $\|N\|<1$,于是(5.3)为渐近稳定的充分必要条件为

(S_1) $\lambda\in\sigma[L]\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0$,

(S_2) $\rho[(zI-L)^{-1}(M+zN)]<1,\quad \forall z\neq 0,\mathrm{Re}(z)=0$,

(S_3) $-1\notin\sigma[L^{-1}M]$.

在条件(S_1)成立时,我们有

$$\omega^d F(z,\omega)=\det[zI-L]\det[\omega I-(zI-L)^{-1}(zN+M)]$$

对任意的 z,$\mathrm{Re}(z)\geqslant 0$ 成立.

考虑条件

($\widetilde{S}_2$) $\quad F(z,\omega)\neq 0 \qquad \forall z\neq 0,\mathrm{Re}(z)\geqslant 0$ 及 $|\omega|\geqslant 1$.

定理 5.2[37] 设 $\|N\|<1$,于是(S)成立,当且仅当(S_1)($\widetilde{S}_2$)及(S_3)成立.

在文献[12]中还指明如下充分条件:

定理 5.3 设 $\rho(N)<1$.倘对 $\forall i,\forall\xi\in C,|\xi|\leqslant 1$ 有

$$\mathrm{Re}\lambda_i[(I-\xi N)^{-1}(L+\xi M)]<0,$$

那末系统(5.3)是渐近稳定的.

令

$$Q(\xi)=(I-\xi N)^{-1}(L+\xi M).$$

则我们有如下定理:

定理 5.4 令 $\|N\|<1$.于是(5.3)为渐近稳定的充分必要条件为

(S_1) $\quad\lambda\in\sigma[L]\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0$,

(S_2^*) $\quad\lambda\in\sigma[Q(\xi)],\lambda\neq 0\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0\quad\forall|\zeta|\leqslant 1$,

(S_3) $\quad -1\notin\sigma[L^{-1}M]$.

证明 根据定理 5.2,我们仅需证明($\widetilde{S}_2$)与(S_2^*)等价.设($\widetilde{S}_2$)成立.假设(S_2^*)不成立,于是存在 ξ_0,$|\xi_0|\leqslant 1$,以及 $\lambda_0\neq 0$,$\lambda_0\in\sigma[Q(\xi_0)]$使得 $\mathrm{Re}(\lambda_0)\geqslant 0$.令

$$z_0=\lambda_0,\quad \omega_0=\xi_0^{-1}(\xi_0\neq 0),\tag{5.5}$$

于是得 $|\omega_0|\geqslant 1$ 以及 $\|\omega_0^{-1}N\|<1$,所以 $I-\omega_0^{-1}N$ 非异.这样

$$F(z_0,\omega_0) = \det[z_0 I - (L + \omega_0^{-1}(z_0 N + M))]$$
$$= \det[I - \omega_0^{-1}N]\det[z_0 I - (I - \omega_0^{-1}N)^{-1}(L + \omega_0^{-1}M)] = 0.$$

这与($\widetilde{S}_2$)矛盾,因为$|\omega_0| \geqslant 1, z_0 \neq 0, \mathrm{Re}(z_0) \geqslant 0$.

相反假设(S_2^*)成立而($\widetilde{S}_2$)不成立.于是存在 $z^* \neq 0$, Re(z^*)$\geqslant 0$,以及$|\omega^*| \geqslant 1$ 使得

$$F(z^*,\omega^*) = 0,$$

即

$$\det[z^* I - (L + \omega^{*-1}(z^* N + M))]$$
$$= \det[I - \omega^{*-1}N]\det[z^* I - (I - \omega^{*-1}N)^{-1}(L + \omega^{*-1}M)]$$
$$= 0,$$

这表示 $z^* \in \sigma[Q(\xi^*)]$, $z^* \neq 0$ 且 $\mathrm{Re}(z^*) \geqslant 0$(其中 $\xi^* = \omega^{*-1}$),这与(S_2^*)矛盾.定理5.4证毕.

对于常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = f[t, y(t)], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

考虑如下隐式 Runge-Kutta 方法:

$$K_{n,i} = hf\Big(t_n + c_i h, y_n + \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}K_{n,j}\Big), \tag{5.6a}$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{\nu} b_i K_{n,i}. \tag{5.6b}$$

用(5.6)去求解(5.3)~(5.4),得

$$K_{n,i} = hL\Big[y_n + \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}K_{n,j}\Big] + hM\Big[y_{n-m} + \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}K_{n-m,j}\Big] + NK_{n-m,i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant \nu, \tag{5.7a}$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{\nu} b_i K_{n,i}. \tag{5.7b}$$

其中 $mh = \tau$, $h > 0$ 为步长,$\tau > 0$ 为常数延时量.对 DDEs 来说,上面的隐式 Runge-Kutta 方法称为自然 Runge-Kutta 方法.令

$$b=(b_1,b_2,\cdots,b_\nu)^T,$$
$$K=(K_{n,1},K_{n,2},\cdots,K_{n,\nu})^T,$$
$$e=(1,1,\cdots,1)^T.$$

于是差分方程(5.7)便能写成向量的形式

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} I_{\nu d}-h(A\otimes L) & 0 \\ -b^T\otimes I_d & I_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} \\
&-\begin{bmatrix} 0 & h(e\otimes L) \\ 0 & I_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} \\
&-\begin{bmatrix} h(A\otimes M)+I_\nu\otimes N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{n-m} \\ y_{n-m+1} \end{bmatrix} \\
&-\begin{bmatrix} 0 & h(e\otimes M) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{n-m-1} \\ y_{n-m} \end{bmatrix}=0,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中 $A\otimes M$ 表示 A 与 M 的 Kronecker 乘积.

我们记(5.8)的特征方程(见第四章§4.8)为

$$p_m(z)=\det\begin{bmatrix} T_1(z) & T_2(z) \\ T_3(z) & T_4(z) \end{bmatrix}=0,$$

其中

$$\begin{aligned}
T_1(z)&=z^{m+1}[(I_{\nu d}-h(A\otimes L)) \\
&\quad -z^{-m}(h(A\otimes M)+I_\nu\otimes N)] \\
&=Z^{m+1}[I_\nu\otimes(I_d-z^{-m}N)-A\otimes h(L+z^{-m}M)],
\end{aligned}$$
$$T_2(z)=-z^m he\otimes(L+z^{-m}M),$$
$$T_3(z)=-z^{m+1}(b^T\otimes I_d),$$
$$T_4(z)=(z^{m+1}-z^m)I_d.$$

如果 $|z|\geqslant 1$,则 $I_d-z^{-m}N$ 可逆(假设 $\rho(N)<1$),故

$$\begin{aligned}
T_1(z)&=z^{m+1}(I_\nu\otimes(I_d-z^{-m}N)) \\
&\quad [I_{\nu d}-(I_\nu\otimes(I_d-z^{-m}N))^{-1}(A\otimes h(L+z^{-m}M))] \\
&=z^{m+1}(I_\nu\otimes(I_d-z^{-m}N))
\end{aligned}$$

$$[I_{\nu d} - hA \otimes (I_d - z^{-m}N)^{-1}(L + z^{-m}M)]$$
$$= z^{m+1}(I_\nu \otimes (I_d - z^{-m}N))[I_{\nu d} - hA \otimes Q(z^{-m})].$$

那么

$$\det\{T_1(z)\} = \{z^{m+1}\}^{\nu d}\{\det(I_d - z^{-m}N)\}^\nu$$
$$\det\{I_{\nu d} - hA \otimes Q(z^{-m})\}.$$

倘若定理 5.3 中的条件成立,那么对 $|Z| \geqslant 1$,有

$$\mathrm{Re}\lambda_i(Q(z^{-m})) < 0. \tag{5.9}$$

再假定 Runge-Kutta 方法是 A 稳定的,那么对 $|Z| \geqslant 1$,有

$$\det\{T_1(z)\} = [z^{m+1}]^{\nu d}\{\det(I_d - z^{-m}N)\}^\nu$$
$$\prod_{i=1}^{d} \det\{I_\nu - h\lambda_i Q(z^{-m})A\}$$
$$\neq 0.$$

上面第一个等式的获得,我们使用了 Kronecker 乘积的谱性质(见[27]).

在 $\det\{T_1(z)\} \neq 0$ 时,有如下恒等式(见第四章 §4.8)

$$\det\begin{Bmatrix} T_1(z) & T_2(z) \\ T_3(z) & T_4(z) \end{Bmatrix}$$
$$= \det\{T_1(z)\}\det\{T_4(z) - T_3(z)T_1(z)^{-1}T_2(z)\}.$$

于是

$$p_m(z) = 0 \Leftrightarrow \det\{T_4(z) - T_3(z)T_1(z)^{-1}T_2(z)\} = 0.$$

但

$$T_4(z) - T_3(z)T_1(z)^{-1}T_2(z)$$
$$= z^m[zI_d - I_d - (b^{\mathrm{T}} \otimes I_d)(I_{\nu d} - hA \otimes Q(z^{-m}))^{-1}$$
$$(I_\nu \otimes (I_d - z^{-m}N)^{-1})(he \otimes (L + z^{-m}M))]$$
$$= z^m[zI_d - I_d - (b^{\mathrm{T}} \otimes I_d)(I_{\nu d} - hA \otimes Q(z^{-m}))^{-1}$$
$$(he \otimes Q(z^{-m}))],$$

令 $r(q)$是熟知的 IRK 的稳定性函数,它定义为

$$r(q) = 1 + b^T(I - Aq)^{-1}eq,$$

那么

$$\det\{T_4(z) - T_3(z)T_1(z)^{-1}T_2(z)\}$$
$$= z^{md}\det\{zI_d - r(hQ(z^{-m}))\}.$$

利用算子的谱映象定理(见文献[17])有

$$\lambda_i[r(hQ(z^{-m}))] = r[\lambda_i(hQ(z^{-m}))],\quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{5.10}$$

有了上面的推导,我们便有如下本节主要结果:

定理 5.4 假设方程(5.3)的系数 L, M 及 N 满足定理 5.3 中的条件,那么隐式 Runge-Kuttta(5.6)求解(5.3)~(5.4)是渐近稳定的,当且仅当它是 A 稳定的.

证明 设方法(5.6)是 A 稳定的(对求解 $\mathrm{ODE_s}$ 而言).我们要来证明它对于求解 $\mathrm{DDE_s}$(5.3)~(5.4)是渐近稳定的.为此我们仅需证明(见第四章§4.8)

$$p_m(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1.$$

按照上面的推导,如果 $p_m(z)$ 有某零点 $Z, |z| \geqslant 1$,导致

$$z = \lambda[r(hQ(z^{-m}))].$$

由(5.9)式及(5.10)式,

$$\begin{aligned} |z| &= |\lambda[r(hQ(z^{-m}))]| \\ &= |r[\lambda(hQ(z^{-m}))]| \\ &< 1, \end{aligned}$$

但这是不可能的,因为我们假定了 $|z| \geqslant 1$.

相反,我们令 $N = 0, L = a, M = b$ 是两个复数,定理 5.3 的条件导致 $|b| < -\mathrm{Re}(a)$,按第四章§4.4 的结果知 IRK 是 A 稳定的.

在上面的讨论中,我们总假定 $mh = \tau$.但对任意的步长 $h > 0$,不一定能找到自然数 $m \geqslant 1$ 使得 $mh = \tau$,从而必须进行 Lagrange 插值,其讨论方法可参阅第四章§4.8 的内容.

第八章　延时积分方程的数值解

§8.1　引言

我们考虑第二类 Volterra 积分方程

$$f(t)=g(t)+\int_0^t K(t,s,f(s),f(s-\tau))\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant T,\quad(1.1)$$

$$f(t)=\varphi(t),\qquad -\tau\leqslant t\leqslant 0,\quad(1.2)$$

其中 τ 是一个正常数，$f(t)$是未知函数，$g(t),\varphi(t),K(t,s,u,v)$是给定的已知函数，并假定它们有充分高阶的连续导数，使得(1.1)～(1.2)存在唯一解.

对于导出(1.1)～(1.2)的数值解法，其本质的问题是对出现在(1.1)中积分使用数值求积公式，即

$$\int_0^{t_n}K(t_n,s,f(s),f(s-\tau))\mathrm{d}s\approx h\sum_{j=0}^{n}w_{n,j}K(t_n,s_j,f_j,f_{j-\tau}).\tag{1.3}$$

其中 $t_n=nh,s_j=jh,h>0$ 为步长，$f_j\sim f(t_j)$. 值 $w_{n,j}$是某一类数值积分方法的权.

本章介绍的数值方法

$$f_n=g(t_n)+h\sum_{j=0}^{n}w_{n,j}K(t_n,s_j,f_j,f_{j-\tau}),n\geqslant k,\quad(1.4)$$

中的权 $w_{n,j}$，设法用一个线性多步法$\langle\rho,\sigma\rangle$来确定，从而方法(1.4)被称为“$\langle\rho,\sigma\rangle$可约积分公式”. 对常微分方程初值问题的线性多步法，如梯形公式，Simpson 公式，Adams-Bashforth 公式，Adams-Moulton 公式等等，它们的导出往往依赖于数值积分公式，但也有一类线性多步法是从别的途径导出的，如 BDF 方法，MBDF 及 DBDF 方法(详见第三章). 但是数值积分方法与线性多步法之间存在密切关系是十分自然的事，当然 BDF，MBDF，及

DBDF 方法与常见的数值积分公式之间关系并不显然.

利用可约积分公式来解 Volterra 积分方程的好处之一是容易分析方法的数值稳定性,因为对于常用的线性多步法,其稳定性质是已知的.这方面的研究工作起始于 70 年代中期.

§8.2 可约积分公式

对于线性多步法$\langle\rho,\sigma\rangle$,其中

$$\rho(\zeta) = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i\zeta^{k-i}, \tag{2.1a}$$

$$\sigma(\zeta) = \sum_{i=0}^{k}\beta_i\zeta^{k-i}, \tag{2.1b}$$

分别是该线性多步法的第一及第二特征多项式,它们满足相容性条件 $\rho(1)=0,\rho'(1)=\sigma(1)$,及零稳定性条件,并且$\langle\rho,\sigma\rangle$是既约的,即多项式 $\rho(\zeta)$与 $\sigma(\zeta)$既约.

我们用线性多步法(2.1)来解初值问题

$$y'(t) = \phi(t),$$
$$y(0) = 0.$$

将产生如下关系:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n-i} = h\sum_{i=0}^{k}\beta_i\phi(t_{n-i}), n \geqslant k, \tag{2.2}$$

其中 y_n 是

$$y(t_n) = \int_0^{t_n}\phi(s)\mathrm{d}s$$

的近似值.

假设我们的初始值 $y_0,y_1,\cdots,y_{k-1}$确定如下:

$$y_n = h\sum_{j=0}^{k-1}w_{n,j}^{(s)}\phi(t_j), \quad n = 0,1,2,\cdots,k-1. \tag{2.3}$$

此处 $w_{n,j}^{(s)}$之上标(s)表示是确定初始值的权.

对于 $n\geqslant k$,我们有

$$y_n = h\sum_{j=0}^{n}w_{n,j}\phi(t_j), \quad n \geqslant k, \tag{2.4}$$

作上式的线性组合

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} = h \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \sum_{j=0}^{n} w_{n-i,j} \phi(t_j).$$

把上式右端整理为

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} = {} & h \sum_{i=0}^{k} \alpha_i w_{n-i,0} \phi(0) \\ & + h \sum_{i=0}^{k} \alpha_i w_{n-i,1} \phi(t_1) \\ & + \\ & \vdots \\ & + \ h \sum_{i=0}^{k} \alpha_i w_{n-i,n} \phi(t_n).\end{aligned} \tag{2.5}$$

为了使得(2.5)与(2.2)一致,仅需令($n \geqslant k$)

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i w_{n-i,j} = \begin{cases} 0 & j = 0,1,\cdots,n-k-1, \\ \beta_{n-j}, & j = n-k, n-k+1,\cdots,n. \end{cases} \tag{2.6}$$

在关系(2.6)中,我们规定 $w_{n,j} = w_{n,j}^{(s)}, n, j = 0,1,\cdots,k-1$,对于 $j > \max\{n, k-1\}$,令 $w_{n,j} = 0$.(2.3)称为初始积分公式,它只用到权 $\{w_{n,j}^{(s)}\}_{n,j=0}^{k-1}$. 利用关系(2.6),如果提供初始积分的权 $\{w_{n,j}^{(s)}\}_{n,j=0}^{k-1}$. 及 $\alpha_i, \beta_i, 0 \leqslant i \leqslant k$,那末我们便能生成所有的 $w_{n,j}$. 如此定义的数值积分公式称为是**$\langle \rho, \sigma \rangle$可约的**.我们今后用$[\varphi_{Kj}; \langle \rho, \sigma \rangle]$来表示,其中 φ_k 表示初始积分公式,$\langle \rho, \sigma \rangle$表一个线性多步法.

我们把所有积分公式的权写成矩阵的形式.

$$w = \left[\begin{array}{ccc:ccc} w_{00} & \cdots & w_{0k-1} & & & \\ \vdots & & & & 0 & \\ w_{k-1,0} & \cdots & w_{k-1,k-1} & & & \\ \hdashline w_{k0} & \cdots & w_{k,k-1} & w_{kk} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ w_{n,0} & \cdots & w_{n,k-1} & w_{nk} & \cdots & w_{nn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \varphi_k & 0 \\ \hdashline W_k & \Omega \end{array}\right]. \tag{2.7}$$

我们从(2.6)中看出，矩阵 W 中的第 j 列元素 $w_{n,j}$ 仅仅依赖于 $w_{n-k,j},\cdots w_{n-1,j}$ 共 k 个元素，也即 w_k 中的元素只依赖于 φ_k 中的元素，如 $n=k$，则 $w_{n,j}, 1\leqslant j\leqslant k-1$ 可用 $w_{0,j}, w_{1,j},\cdots, w_{k-1,j}$，$n=k+1$，则 $w_{n,j}, 1\leqslant j\leqslant k-1$ 可用 $w_{1,j}, w_{2,j},\cdots, w_{k,j}$ 来表示，为此继续，可逐次递推地决定每个 $w_{n,j}, 1\leqslant j\leqslant k-1, n=k, k+1,\cdots$. 对于 Ω 中的元素，与初始元素，即 $\{w_{n,j}\}_{n,j=0}^{k-1}$ 无关. 进一步，从(2.6)可以推出 Ω 中上三角部分为 0，以及 Ω 是半循环阵，即

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_0 & & & 0 \\ w_1 & w_0 & & \\ w_2 & w_1 & w_0 & \ddots \\ \vdots & w_2 & w_1 & \ddots \\ & \vdots & w_2 & \ddots \\ & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

且满足

$$\begin{cases} \alpha_0 w_0 & = \beta_0 \\ \alpha_0 w_1 + \alpha_1 w_0 & = \beta_1 \\ \alpha_0 w_2 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_0 & = \beta_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \end{cases} \tag{2.9}$$

当 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 已知时，同样容易求出 $w_0, w_1, w_2,\cdots, w_n,\cdots$. 从(2.8)容易看出 $w_{n,j}=w_{n-j}$，对 $n-j\geqslant 0, j\geqslant k$. 这样一来，从初始权由(2.6)决定 W_k 中的元素，从(2.9)式决定 Ω 中的元素($\langle\rho,\sigma\rangle$ 已知)，矩阵 W 的元素全部决定. 且计算十分简单，只要递推地求 W_k 中每列元素及序列 $\{w_i\}_0^n$ 的每个元素.

下面我们来给出 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 可约积分方法的收敛阶. 令

$$\begin{aligned} Q_n(\phi) :&= y_n - y(t_n) \\ &= h\sum_{j=0}^{n} w_{n,j}\phi(t_j) - \int_0^{t_n}\phi(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.10}$$

定理2.1 令线性多步法 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 的收敛阶是 p，而初始积分公

式 φ_k 有渐近公式

$$Q_i[\phi] = d_i h^{s_i} \phi^{(s_i-1)}(0) + O(h^{s_i+1}), h \to 0, i = 1 \sim k-1.$$

令 $s = \min\{s_0, s_1, \cdots, s_{k-1}\}$，

$$d_i^* = \begin{cases} d_i & s_i = s, \\ 0 & s_i > s, \end{cases} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

则

$$Q_n(\phi) = -C_{p+1}h^p\{\phi^{(p-1)}(t_n) - \phi^{(p-1)}(0)\} + O(h^{p+1})$$
$$+ d_n^* h^s + O(h^{s+1}),\ h \to 0, nh \text{ 固定}. \tag{2.11}$$

其中 d_n^* 是方程

$$\sum_{i=0}^{k} a_i d_{n-i}^* = 0, n \geqslant k$$

之解，初始值为 $d_0^*, d_1^*, \cdots, d_{k-1}^*$.

证明 请参考文献：Walkenfeld, P. H. M. : The Construction of reducible quadrature rules for Volterra integral and integral-differential equations, *IMA J. f Numer. Anal.*, 2(1982)131～152.

定理 2.1 的一个有用的推论是，如果$\langle\rho,\sigma\rangle$的收敛阶为 p（即 $p+1$ 阶相容的多步法），而初始积分公式 φ_k 之精度$S_i \geqslant S = p$，那末$\langle\rho,\sigma\rangle$可约积分公式满足

$$|Q_n(\phi)| \leqslant Ah^p, h \to 0, nh \text{ 固定}.$$

§8.3 $\langle\rho,\sigma\rangle$可约积分公式的稳定性

这一节我们分析(1.4)的数值稳定性. 直接对(1.4)进行分析是困难的，我们将考虑如下试验方程

$$y(t) = g(0) + \int_0^t [py(s) + qy(s-\tau)]\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.1}$$

$$y(t) = \varphi(t), \qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0. \tag{3.2}$$

这里 $\varphi(t)$是已知函数，$y(t)$是未知的，$\tau > 0$ 为常数，p, q 为复数. 用$\langle\rho,\sigma\rangle$可约积分公式去求解(3.1)～(3.2)，得

$$y_n = g(0) + h\sum_{j=0}^{n} W_{n,j}[py_j + qy^h(t_j - \tau)], \qquad (3.3)$$

其中 $w_{n,j}$ 与 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 之间满足关系(2.6)，$y^h(t_j-\tau)$ 是 $y(t)$ 在 $(t_j-\tau)$ 处的数值逼近，$y_j \sim y(t_j)$.

在(3.3)两端逐次乘权 α_i 并求和，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n-i} &= \sum_{i=0}^{k}\alpha_i g(0) + hp\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\sum_{j=0}^{n} w_{n-i,j}y_j \\ &\quad + hq\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\sum_{j=0}^{n} w_{n-i,j}y^h(t_j-\tau) \qquad (3.4)\\ &= hp\sum_{i=0}^{k}\beta_i y_{n-i} + hq\sum_{i=0}^{k}\beta_i y^h(t_{n-i}-\tau).\end{aligned}$$

在(3.4)中的最后一个等式我们用到 $\sum_{i=0}^{k}\alpha_i = \rho(1) = 0$ 及(2.6)式.

差分方程(3.4)一般无法求解，因为$(t_j-\tau)$不一定在节点上. 为此，与第四章§4.3中那样，必须用插值来表示 $y^h(t_{n-i}-\tau)$，其中$(m-\delta)h=\tau$.

令

$$y^h(t_i+\delta h) = \sum_{j=-r}^{s}L_j(\delta)y_{i+j}, 0\leqslant\delta<1,\ i=0,1,\cdots, \qquad (3.5)$$

$$L_j(\delta) = \prod_{\substack{i=-r\\ i\neq j}}^{s}\left(\frac{\delta-i}{j-i}\right). \qquad (3.6)$$

代入(3.4)得

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n-i} = a\sum_{i=0}^{k}\beta_i y_{n-i} + b\sum_{i=0}^{k}\beta_i\sum_{j=-r}^{s}L_j(\delta)y_{n-i-m+j}. \qquad (3.7)$$

其中 $a=ph, b=qh$.

注意到积分方程(3.1)，等价于

$$y'(t) = py(t) + qy(t-\tau), \quad 0\leqslant t\leqslant T. \qquad (3.8)$$

第四章§4.1中我们知道，当$|q|<-\mathrm{Re}(p)$时(3.7)是渐近稳定的，也即其解 $y(t)$满足

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$

令

$$H = \{(a,b): \mathrm{Re}(a) < 0, |b| < -\mathrm{Re}(a)\},$$
$$S_\delta = \{(a,b): (3.7)\text{ 之解 } y_n \to 0, n \to \infty\},$$
$$S = \prod_{0 \leqslant \delta < 1} S_\delta.$$

定义3.1 一个$\langle \rho, \sigma \rangle$可约积分公式,用于延时 volterra 积分方程(1.1)～(1.2)时被称为是稳定的,当且仅当

$$H \subseteq S.$$

类似于第四章§4.3,我们容易写出差分方程(3.7)之特征方程为

$$p_m(z) = z^{m+r}Q(z) - p(z,\delta), \tag{3.9}$$

其中

$$Q(z) = \rho(z) - a\sigma(z),$$
$$p(z,\delta) = b\sigma(z)\gamma(z,\delta),$$
$$\gamma(z,\delta) = \sum_{j=-r}^{s} L_j(d) z^{j+r},$$

那末,

$$H \subseteq S \Leftrightarrow \forall 0 \leqslant \delta < 1, p_m(z) \text{ 是 Schur 多项式}.$$

定理3.1 对于 Lagrange 插值(3.5)～(3.6)满足 $r \leqslant s \leqslant r+2$,一个$\langle \rho, \sigma \rangle$可约积分公式是稳定的,当且仅当$\langle \rho, \sigma \rangle$是 A 稳定的.

定理 3.1 是第四章§4.3 定理 10 的直接推论.

§8.4 θ 方法的数值稳定性

我们考虑把(1.4)中的求和部分进行线性组合,得 θ 方法:

$$f_n = q(t_n) + h(1-\theta)\sum_{j=0}^{n-1} w_{n-1,j} K(t_{n-1}, s_j, f_j, f_{j-\tau})$$
$$+ h\theta \sum_{j=0}^{n} w_{n,j} K(t_n, s_j, f_j, f_{j-\tau}), n \geqslant k, 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{4.1}$$

为了分析 θ 方法(4.1)之数值稳定性,我们把 θ 方法用于试验方程(3.1)～(3.2),得

$$y_n = g(0) + h(1-\theta)\sum_{j=0}^{n-1} w_{n-1,j}(py_j + qy^h(t_j - \tau)) + h\theta\sum_{j=0}^{n} w_{n,j}(py_j + qy^h(t_j - \tau)). \tag{4.2}$$

类似于上节,把(4.2)式乘权再求和,得

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n-i} = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i g(0) + \sum_{i=0}^{k}\alpha_i(1-\theta)h\sum_{j=0}^{n-1} w_{n-1-i,j}(py_j + qy^h(t_j - \tau)) + \sum_{i=0}^{k}\alpha_i\theta h\sum_{j=0}^{n} w_{n-i,j}(py_j + qy^h(t_j - \tau)).$$

使用条件(2.6)及 $\rho(1)=0$,得

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n-i} = \theta h\left\{p\sum_{i=0}^{k}\beta_i y_{n-i} + q\sum_{i=0}^{k}\beta_i y^h(t_i - \tau)\right\} + (1-\theta)h\left\{p\sum_{i=1}^{k}\beta_i y_{n-i} + q\sum_{i=1}^{k}\beta_i y^h(t_i - \tau)\right\}. \tag{4.3}$$

再用(3.5)代入(4.3),得

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n-i} = \theta h\left\{p\sum_{i=0}^{k}\beta_i y_{n-i} + q\sum_{i=0}^{k}\beta_i\sum_{j=-r}^{s}L_j(\delta)y_{n-i-m+j}\right\} + (1-\theta)h\left\{p\sum_{i=1}^{k}\beta_i y_{n-i} + q\sum_{i=1}^{k}\beta_i\sum_{j=-r}^{s}L_j(\delta)y_{n-i-m+j}\right\}.$$

上述差分方程的特征多项式为

$$\rho(z) - \theta\{a\sigma(z) + z^{-(m+r)}b\sigma(z)\gamma(z,\delta)\} - (1-\theta)\{a\,\widetilde{\sigma}(z) + z^{-(m+r)}b\widetilde{\sigma}(z)\gamma(z,\delta)\}, \tag{4.4}$$

其中 $\widetilde{\sigma}(z) = \sum_{i=1}^{k}\beta_i z^{k-i}, a = ph, b = qh$.

要分析这样一个多项式是否为 Schur 多项式是十分困难的.

我们把(4.4)式写为

$$p_m(z) = Q(z) - p(z,\delta), \tag{4.5}$$

其中

$$Q(z) = z^{m+r}\{\rho(z) - a\sigma(z) + (1-\theta)a\beta_0 z^k\}, \tag{4.6}$$

$$p(z,\delta) = \{\sigma(z) + (1-\theta)\beta_0 z^k\} b\gamma(z,\delta). \tag{4.7}$$

那末根据第四章定理 2.7 知,$p_m(z)$为 Schur 多项式,当且仅当

(i) $Q(z)$是 Schur 多项式,

(ii) $|p(z,\delta)| \leqslant |Q(z)|, \quad \forall z \in S$,

(iii) $p_m(z) \neq 0, \quad \forall z \in S$,

其中 $S = \{z : z = e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 1, i = \sqrt{-1}\}$.

我们不能指望有定理 3.1 那样的结论,即 θ 方法是稳定的,当且仅当$\langle\rho,\sigma\rangle$是 A 稳定的.

例如,$\langle\rho,\sigma\rangle$为著名的梯形公式,它是 A 稳定(对 ODEs 而言),但是对方法(4.4)来说,不能保证是数值稳定的,事实上,此时

$$\rho(z) = z - 1,$$

$$\sigma(z) = \frac{1}{2}(z+1).$$

令 $\theta = \frac{1}{2}$,则

$$Q(z) = z^{m+r}\left\{z - 1 - \frac{a}{2}(z+1) + \frac{1}{4}az\right\}$$

$$= z^{m+r}\left\{z - 1 - \frac{1}{4}az - \frac{a}{2}\right\},$$

$Q(z)$有一个零点为

$$z = \frac{1 + \frac{1}{2}a}{1 - \frac{1}{4}a},$$

当 $\mathrm{Re}(a) \to -\infty$时,$z$ 的模大于 1. 因此我们要问,θ 方法(4.1)或(4.4)为稳定时,θ 及$\langle\rho,\sigma\rangle$将满足什么条件? 对一般的$\langle\rho,\sigma\rangle$来说,回答是困难的. 下面考虑一个简单的$\langle\rho,\sigma\rangle$,如果令

$$\rho(z) = z - 1,$$

$$\sigma(z) = \Theta z + (1 - \Theta), \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1,$$

那末 Θ 满足什么条件时 θ 方法为稳定的.

为了使推导简化,我们考虑线性插值

$$y^h(t_i - \tau) = \delta y_{i-m+1} + (1 - \delta) y_{i-m},$$

其中 $(m - \delta)h = \tau, 0 \leqslant \delta < 1, m \geqslant 1$ 为某自然数. 这样可得 $\gamma(z, \delta) = \delta z + (1 - \delta)$,于是

$$p_m(z) = z^m\{z - 1 - (1 - \Theta + \theta\Theta z)a\} - b\{[\delta z + (1 - \delta)][(1 - \Theta) + \Theta\theta z]\}. \tag{4.8}$$

此时条件(ii)等价于

$$|b||1 - \Theta + \Theta\theta z| \leqslant |z - 1 - a(1 - \Theta + \theta\Theta z)|, \ |z| = 1, \tag{4.9}$$

作如下线性变换

$$w = \frac{z - 1}{1 - \Theta + \Theta\theta z}, \tag{4.10}$$

那末(4.9)等价于

$$|b| \leqslant |w - a|, \quad 当 |z| = 1. \tag{4.11}$$

变换(4.10)把单位圆 $|z| = 1$ 变为 w 平面上的一个广义圆盘 $\mathscr{D}_w$.

条件(i)等价于

$$\left|\frac{1 + (1 - \Theta)a}{1 - \theta\Theta a}\right| < 1. \tag{4.12}$$

我们注意到 $0 \leqslant \Theta < 1/(1 + \theta)$,(4.12)式不能满足,所以我们仅需考虑

$$情况\ \text{I} \quad \Theta = \frac{1}{1 + \theta},$$

$$情况\ \text{II} \quad \frac{1}{1 + \theta} \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

对于情况(Ⅰ),可以验证,线性变换(4.10)把单位圆周 $|z| = 1$ 映为右半平面(包括虚轴)内的 $\mathscr{D}_w$. 因为 $|b| < -\mathrm{Re}(a)$,所以(4.11)始终成立. 而(4.12)也是满足的,从而 $p_m(z)$ 是 Schur 多项式,从而 θ 方法是稳定的.

对于情况(Ⅱ),可用类似于情况(Ⅰ)的办法证明,$p_m(z)$也是Schur 多项式.

定理 4.1 由(4.1)式定义的 θ 方法,如果采用线性插值,$\langle\rho,\sigma\rangle$采用 Θ 方法,那末当且仅当

$$\frac{1}{1+\theta}\leqslant\Theta\leqslant 1,$$

$\theta-\Theta$ 方法是稳定的.

第九章　变数延时量方程的数值处理

§9.1　引言

我们前面研究的延时微分方程，不管是线性的，或是非线性的，其中延时量 $\tau>0$ 都规定为常数. 但是现实生活中并非如此，往往会出现延时量 τ 是时间 t 的函数，下面我们将考虑如下初值问题：

$$y'(t)=f(t,y(t),y(\alpha[t])),\quad t\geqslant 0, \tag{1.1}$$

$$y(t)=\varphi(t),\quad t\leqslant 0, \tag{1.2}$$

其中 $\alpha[t]\leqslant t$，$\varphi(t)$ 为已知函数，$y(t)$ 为未知函数.

我们用最简单的 θ 方法去处理(1.1)～(1.2)

$$\begin{aligned}y_{n+1}=y_n+h\{&\theta f(t_{n+1},y_{n+1},y^h(\alpha[t_{n+1}]))\\&+(1-\theta)f(t_n,y_n,y^h(\alpha[t_n]))\},\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 $y^h(t)$ 是分段线性插值多项式，即

$$\begin{aligned}y^h(t)&=\frac{t-kh}{h}y_{k+1}+\frac{(k+1)h-t}{h}y_k\\&kh\leqslant t\leqslant(k+1)h,\ k=0,1,2,\cdots.\end{aligned} \tag{1.4}$$

另外，$0\leqslant\theta\leqslant 1$，$t_n=nh$，$y_n\sim y(t_n)$，$y_{-n}=\varphi(-nh)$，$n=0,1,2,\cdots$.

当然，也可以用较复杂的线性多步法 $\langle\rho,\sigma\rangle$ 去解初值问题(1.1)～(1.2)，即

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f(t_{n+j},y_{n+j},y^h(\alpha[t_{n+j}])). \tag{1.5}$$

当然，$y^h(t)$ 一般不能再用分段线性插值多项式来代替，而需用分段 Lagrange 插值多项式来替代.

为了讨论方法(1.3)或(1.5)的数值稳定性，必须用一种简单的试验方程来替代方程(1.1)，而且所得的稳定性结果对(1.1)也

有一定的指导作用.

在文献[16]中曾提出如下试验方程

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + by(\lambda t), & t \geqslant 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 a,b 为实数,$0<\lambda<1$.我们有如下定理

定理 1.1[36] 如果方程(1.6)的系数满足

$$|b| < -a, \tag{1.7}$$

那末(1.6)的任意解 $y(t)$ 满足

$$\lim_{\lambda \to \infty} y(t) = 0.$$

§9.2 θ 方法的数值稳定性

我们用 θ 方法(1.3)去解试验方程(1.6).

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \theta h[ay_{n+1} + by^h(\lambda t_{n+1})] \\ &\quad + (1-\theta)h[ay_n + by^h(\lambda t_n)]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

为了用节点上的逼近值 y_v 来表示 $y^h(\lambda t_{n+1})$ 及 $y^h(\lambda t_n)$,我们注意到对任意确定的 n,λt_n,λt_{n+1}要末同时属于$[t_{v-1},t_v]$,要末 $\lambda t_n \in [t_{v-1},t_v]$,$\lambda t_{n+1} \in [t_v,t_{v+1}]$对某一个 $1 \leqslant v \leqslant n$.

在第一种情况,存在 $u,v \in [0,1)$使得

$$y^h(\lambda t_{n+1}) = uy_v + (1-u)y_{v-1}, \tag{2.2}$$

$$y^h(\lambda t_n) = vy_v + (1-v)y_{v-1}. \tag{2.3}$$

在第二种情况,存在 $u,v \in [0,1)$使得

$$y^h(\lambda t_{n+1}) = uy_{v+1} + (1-u)y_v, \tag{2.4}$$

$$y^h(\lambda t_n) = vy_v + (1-v)y_{v-1}, \tag{2.5}$$

在第一种情况,差分方程(2.1)变为

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \theta h[ay_{n+1} + b(uy_v + (1-u)y_{v-1})] \\ &\quad + (1-\theta)h[ay_n + b(vy_v + (1-v)y_{v-1})] + y_n, \end{aligned} \tag{2.6}$$

整理后变为

$$(1-\theta\overline{a})y_{n+1}=[1+(1-\theta)\overline{a}]y_n+\overline{b}py_v+\overline{b}qy_{v-1},$$
(2.7)

其中$\overline{a}=ah,\overline{b}=bh,p=\theta u+(1-\theta)v,q=\theta(1-u)+(1-\theta)(1-v),0\leqslant\theta\leqslant1,0\leqslant u,v<1,p\in[0,1),p+q=1$.

在第二种情况，差分方程(2.1)变为

$$\begin{aligned}y_{n+1}=y_n&+\theta h[ay_{n+1}+b(uy_{v+1}+(1-u)y_v]\\&+(1-\theta)h[ay_n+b(vy_v+(1-v)y_{v+1}],\end{aligned}\tag{2.8}$$

或者

$$\begin{aligned}(1-\theta\overline{a})y_{n+1}=y_n&+[1+(1-\theta)\overline{a}]y_n+\theta\overline{b}uy_{v+1}\\&+\overline{b}[\theta(1-u)+(1-\theta)v]y_v\\&+\overline{b}[(1-\theta)(1-v)]y_{v-1}.\end{aligned}$$
(2.9)

定义2.1 一个数值方法，用来解变延时量微分方程时被说成**是渐近稳定的**，当且仅当该方法用以解任一系数满足(1.7)之试验方程(1.6)时，其近似解 y_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}y_n=0,$$

其中 y_n 是$y(t_n)$之逼近解，$t_n=nh$.

按照上面的定义，我们可以给出 θ 方法的**稳定集**

$S_\theta=\{(\overline{a},\overline{b}):|\overline{b}|<-\overline{a},(2.7)$ 及(2.9) 之解 $y_n\to0,n\to\infty\}$.

下面的事，便是确定在什么条件下(2.7)，(2.9)之解 $y_n\to0(n\to\infty)$. 这是一个十分复杂的问题，其原因之一，在插值过程(2.2)～(2.5)中所产生的 u,v 都是 n 的函数，即 $u=u(n),v=v(n)$. 其二，差分方程(2.7)～(2.9)中出现的 v 也是 n 的函数，$v=v(n)$，且当 $n\to\infty$时，$v(n)\to\infty$. 这样一来，方程(2.7)或(2.9)都是变系数，变阶的差分方程. 难以使用特征多项式的理论去讨论其稳定性行为.

下面的讨论采用直接估计$|y_{n+1}|$的大小来检验差分方程的稳定性. 为了使得在插值过程(2.2)～(2.5)中不再使用到值y_{n+1}，我们要求 $\lambda t_{n+1}\in[t_{n-1},t_n]$，这等价于

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} < n \leqslant \frac{1+\lambda}{1-\lambda}. \tag{2.10}$$

令

$$n_0 = \max\left\{ n, \frac{\lambda}{1-\lambda} < n \leqslant \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right\}, \tag{2.11}$$

$$M = \max\{ |y_0|, |y_1|, \cdots, |y_{n_0}| \}, \tag{2.12}$$

$$T_\theta = \{ (\bar{a}, \bar{b}) : |\bar{b}| < -\bar{a}, \tag{2.13}$$

$$|\bar{b}| < |1-\theta\bar{a}| - |1+(1-\theta)\bar{a}| \}.$$

定理 2.1 对于 θ 方法(1.3),我们有 $T_\theta \subseteq S_\theta$.

证明 设$(\bar{a},\bar{b}) \in T_\theta$,我们来指明$(\bar{a},\bar{b}) \in S_\theta$.为了简单起见,我们以(2.7)为例.

$$|y_{n_0+1}| \leqslant |\varphi| |y_{n_0}| + \left| \frac{\bar{b}p}{1-\theta\bar{a}} \right| |y_{v(n_0)}| + \left| \frac{\bar{b}q}{1-\theta\bar{a}} \right| |y_{v(n_0)-1}|,$$

其中

$$\varphi = \frac{1+(1-\theta)\bar{a}}{1-\theta\bar{a}}.$$

注意到(2.12),

$$|y_{n_0+1}| \leqslant \left\{ |\varphi| + \frac{|\bar{b}|}{1-\theta\bar{a}} \right\} M.$$

$$:= CM.$$

注意到(2.13),便有

$$0 < C < 1.$$

利用上面的估计方法,我们有

$$|y_n| \leqslant CM, n = n_0+1, n_0+2, \cdots.$$

值得注意的是,对于足够大的 n,如 $n = n_1$,此时将有

$$|y_{n_1}|, |y_{v(n_1)}|, |y_{v(n_1)-1}| \leqslant CM.$$

换句话说,对于 $n_1, v(n_1) - 1 \geqslant n_0 + 1$.如此将有

$$|y_{n_1+1}| \leqslant \left\{ |\varphi| + \frac{|\bar{b}|}{1-\theta\bar{a}} \right\} CM,$$

$$= C^2 M.$$

再用上面的估计方法，有

$$|y_n| \leqslant C^2 M, \quad n = n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots.$$

同样，对于足够大的 n，如 $n = n_2$，使得 $v(n_2) - 1 \geqslant n_1 + 1$. 那末

$$|y_{n_2+1}| \leqslant C^3 M.$$

一般地，

$$|y_{n_l+1}| \leqslant C^{l+1} M, \quad l = 0,1,2,\cdots.$$

令 $l \to \infty$，便得 $y_{n_l} \to 0$. 从子序列 $\{y_{n_l}\}$ 的构造不难看出

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

如果在计算过程中有时用到差分方程(2.9)而不是(2.7)，那末只要注意到 $\theta u + \theta(1-u) + (1-\theta)v + (1-\theta)(1-v) = 1$，便会有相同的结论，定理 2.1 证毕.

集合 T_θ 中除了要求 $|\bar{b}| < -\bar{a}$ 外，还对 b 进行了严格的限制，按照定义 2.1 对一般的 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$，$\theta$ 方法不能保证是渐近稳定的. 但 $\theta = 1$，即隐式 Euler 公式除外. 令

$$H = \{(\bar{a}, \bar{b}) : |\bar{b}| < -\bar{a}\},$$

那末，θ 方法是渐近稳定的，当且仅当

$$H \subseteq S_\theta.$$

注意到 $\theta = 1$ 时，$H = T_1$，再由定理 2.1($\theta = 1$)得

$$H = T_1 \subseteq S_1.$$

从而有

推论2.2 隐式 Euler 公式用来解变延时量微分方程时是渐近稳定的.

§9.3 多个可变延时量方程的数值解

这一节我们考虑如下微分方程的数值解及其稳定性分析.

$$y'(t) = ay(t) + \sum_{j=1}^{m} b_j y(\lambda_j t), \quad t \geqslant 0, \tag{3.1a}$$

$$y(0) = y_0, \tag{3.1b}$$

其中 $a, b_1, b_2, \cdots, b_m, y_0 \in C, 0 < \lambda_m < \lambda_{m-1} < \cdots < \lambda_1 < 1$.

在上一节,我们已经看到,即使 $m=1$,要研究 θ 方法的数值稳定性也显得十分困难,主要原因是离散后的差分方程是一个变系数变阶的差分方程.这一节我们作如下变量替换,令

$$x(t) = y(e^t) \qquad t \geqslant \log\lambda_m. \tag{3.2}$$

容易验证 $x(t)$ 满足如下方程

$$x'(t) = ae^t x(t) + \sum_{j=1}^{m} b_j e^t x(t + \log\lambda_j), \quad t \geqslant 0, \tag{3.3a}$$

$$x(t) = y(e^t) = \phi(t), \qquad t \in [\log\lambda_m, 0], \tag{3.3b}$$

显然上面的方程并未求出 $y(t), t \in [0,1]$ 时的值,因此在实际求解时,当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 我们仍然用 θ 方法直接求解(3.1a)~(3.1b).幸好[0,1]是一个较小的区间,求解时不会产生十分大的困难.上面所说的事实指明(3.1)与(3.3)是不等价的,但从(3.2)看出,(3.1a)与(3.3a)解的渐近性态是一致的,因此为检验一个数值方法对求解上述可变延时量微分方程的渐近稳定性时,我们可用试验方程(3.3a)替代(3.1a),我们注意到方程(3.3a)是一个变系数常数延时量微分方程,类似于第四章§4.6引理6.2的证明方法可得如下引理:

引理 3.1 [36] 假设(3.3a)的系数 $a, b_j (1 \leqslant j \leqslant m)$ 满足

$$\mathrm{Re}(a) < 0, \tag{3.4a}$$

$$\sum_{j=1}^{m} |b_j| < -\mathrm{Re}(a), \tag{3.4b}$$

于是(3.3a)的任一解满足

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

我们用 θ 方法求解(3.3a)~(3.3b)得

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n &+ \theta h\Big[ae^{t_{n+1}} x_{n+1} + \sum_{j=1}^{m} b_j e^{t_{n+1}} x_{n+1-l_j+\delta_j}\Big] \\ &+ (1-\theta)h\Big[ae^{t_n} x_n + \sum_{j=1}^{m} b_j e^{t_n} x_{n-l_j+\delta_j}\Big], \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $(l_j - \delta_j)h = -\log\lambda_j, \delta_j \in [0,1), l_j \geqslant 1$ 为正整数,$1 \leqslant j \leqslant m$,

$h>0$为步长，$t_n=nh$，$x_n\sim x(t_n)$，$x_{n-l_j+\delta_j}\sim x(t+\log\lambda_j)$. 下面的线性插值公式将使得差分方程(3.5)便于求解：

$$x_{n-l_j+\delta_j}=\delta_j x_{n+1-l_j}+(1-\delta_j)x_{n-l_j},\quad 1\leqslant j\leqslant m. \tag{3.6}$$

把(3.6)代入(3.5)整理后得

$$x_{n+1}=R_n x_n+\sum_{i=1}^{m}S_n^{(i)}\{(1-\theta)[(1-\delta_i)x_{n-l_i}+\delta_i x_{n+1-l_i}]$$
$$+\theta e^h[(1-\delta_i)x_{n+1-l_i}+\delta_i x_{n+2-l_i}]\}, \tag{3.7}$$

其中

$$R_n=\frac{1+(1-\theta)ahe^{t_n}}{1-\theta ahe^{t_{n+1}}}, \tag{3.8a}$$

$$S_n^{(i)}=\frac{b_i he^{t_n}}{1-\theta ahe^{t_{n+1}}},\quad 1\leqslant i\leqslant m. \tag{3.8b}$$

记

$$R:=\lim_{n\to\infty}R_n=-\frac{1-\theta}{\theta e^h}, \tag{3.9a}$$

$$S^{(i)}=\lim_{n\to\infty}S_n^{(i)}=-\frac{b_i}{\theta e^h a},\quad 1\leqslant i\leqslant m. \tag{3.9b}$$

定义3.1 设 $\delta_i\in[0,1)$，$a,b_i\in C$，$1\leqslant i\leqslant m$. 一个数值方法被称为在点$(a,b_1,b_2,\cdots,b_m)$处是 $\Lambda(\delta_1\delta_2\cdots\delta_m)$稳定的，当且仅当该方法求解(3.1)或(3.3)时其逼近解$\{x_n\}$(或$\{y_n\}$)满足(对任意的 $0<\lambda_i$，$1\leqslant i\leqslant m$)

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0\quad(\text{或}\lim_{n\to\infty}y_n=0),$$

其中$(l_i-\delta_i)h=-\log\lambda_i$，$l_i$ 为正整数，$1\leqslant i\leqslant m$.

令

$$S_{\theta,\delta_1,\cdots,\delta_m}=\{(a,b_1,\cdots,b_m):\text{方法在}(a,b_1,\cdots,b_m)\text{处是}$$
$$\Lambda(\delta_1\cdots\delta_m)\text{稳定的}\},$$

$$S_\theta=\bigcap_{0\leqslant\delta_1,\cdots,\delta_m<1}S_{\theta,\delta_1,\cdots,\delta_m},$$

于是我们称 S_θ 为方法的稳定集.

我们定义集合

$$H = \{(a, b_1, \cdots, b_m): a, b_i, 1 \leqslant i \leqslant m \text{ 满足条件(3.4)}\}.$$

定义3.2 一个数值方法被称为 ΛP_m 稳定的，当且仅当

$$H \subseteq S_{\theta,0,\cdots,0}.$$

定义3.3 一个数值方法被称为 ΛGP_m 稳定的，当且仅当

$$H \subseteq S_\theta.$$

引理3.2 假设微分方程(3.1)或(3.3)的系数 $a, b_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 满足(3.4)式，$\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$，于是下列差分方程是渐近稳定的：

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{n+1} = R\tilde{x}_n + \sum_{i=1}^{m} S^{(i)}\{&(1-\theta)[(1-\delta_i)\tilde{x}_{n-l_i} + \delta_i \tilde{x}_{n+1-l_i}] \\ &+ \theta e^h[(1-\delta_i)\tilde{x}_{n+1-l_i} + \delta_i \tilde{x}_{n+2-l_i}]\}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

证明 (3.10)的特征多项式为

$$p(z, \delta_1, \cdots, \delta_m) = Q_{m+1}(z) z^{l_m} - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z, \delta_j) z^{l_m - l_j}, \tag{3.11}$$

其中

$$Q_{m+1}(z) = z - R,$$

$$Q_j(z, \delta_j) = S^{(j)}[\theta e^h z + (1-\theta)][\delta_j z + (1-\delta_j)], \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

为证明引理 3.2，我们只要证明 $p(z, \delta_1, \cdots, \delta_m)$ 是 Schur 多项式即可. 首先由(3.9a)知 $|R| < 1$，于是 $Q_{m+1}(z)$ 是 Schur 多项式，我们再证

$$\sum_{j=1}^{m} |Q_j(z, \delta_j)| < |Q_{m+1}(z)|, \ \forall \ |z| = 1, \delta_j \in [0, 1).$$

我们把圆周上的点 z 表示为 $e^{i\phi}$，$i = \sqrt{-1}$，于是

$$\begin{aligned}|\delta_j e^{i\phi} + (1-\delta_j)| &\leqslant |\delta_j e^{i\phi}| + |1-\delta_j| \\ &\leqslant \delta_j + 1 - \delta_j \\ &= 1 \qquad \forall \delta_j \in [0,1), 1 \leqslant j \leqslant m.\end{aligned}$$

以及

$$\sum_{j=1}^{m}|Q_j(z,\delta_j)|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\frac{|b_j|}{|a|\theta e^h}|\theta e^h e^{i\phi}+1-\theta|$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{|b_j|}{|a|}\left|e^{i\phi}-\left(-\frac{1-\theta}{\theta e^h}\right)\right|$$

$$<|e^{i\phi}-R|$$

$$=|Q_{m+1}(z)|,\qquad\forall\ |z|=1.$$

从第五章定理 4.3 知 $p(z,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m)$是 Schur 多项式. 引理 3.2 证毕.

定理3.1 设$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant1$,于是 θ 方法是ΛGP_m 稳定的.

证明 令

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[x_n]=x_{n+1}-x_nR-\sum_{i=1}^{m}S^{(i)}\{&(1-\theta)[(1-\delta_i)x_{n-l_i}\\&+\delta_ix_{n+1-l_i}]-\theta e^h[(1-\delta_i)x_{n+1-l_i}\\&+\delta_ix_{n+2-l_i}]\}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

于是差分方程(3.7)能够写为

$$\mathscr{L}[x_n]=F_n,\tag{3.13}$$

其中

$$\begin{aligned}F_n=&(R_n-R)x_n+\sum_{i=1}^{m}(S_n^{(i)}-S^{(i)})\{(1-\theta)[(1-\delta)x_{n-l_i}+\delta_ix_{n+1-l_i}]\\&+\theta e^h[(1-\delta_i)x_{n+1-l_i}+\delta_ix_{n+2-l_i}]\}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

令

$$X_n=x_n+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{a}[(1-\delta_j)x_{n-l_j}+\delta_jx_{n+1-l_j}].\tag{3.15}$$

于是从(3.13)可得

$$X_{n+1}=RX_n+F_n,\qquad n\geqslant0.$$

由上式迭代可知

$$X_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} R^k F_{n-k} + R^{n+1} X_0, \quad n \geqslant 0. \qquad (3.16)$$

令 M 是一个正常数,使得

$$|F_k| \leqslant M e^{-kh} \cdot \max_{-l_m \leqslant j \leqslant k} |x_j|, \qquad k \geqslant 0.$$

从(3.16)得

$$|x_{n+1}| \leqslant (1 + M(n+1)e^{-nh}) \max_{-l_m \leqslant k \leqslant n} |x_k| + |R|^{n+1} |X_0|, \qquad n \geqslant 0.$$

由上式可得

$$|x_{n+1}| \leqslant \left\{ \prod_{k=0}^{n} (1 + M(k+1)e^{-kh} + |R|^{k+1}) \right\} \max\left\{ \max_{-l_m \leqslant i \leqslant 0} |x_i|, |X_0| \right\}, \quad n \geqslant 0.$$

可以验证上述无穷乘积收敛,从而解$\{x_n\}$有界.

由于$\{x_n\}$有界,从(3.14)便得

$$\lim_{n \to \infty} F_n = 0,$$

而且 F_n 趋于零的速度与指数 e^{-nh} 趋于零的速度同级(当 $n \to \infty$).由线性非齐次差分方程的一般理论(见盖尔芳特著:有限差分计算,下册),容易推得(3.13)的解满足

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0,$$

这意味着差分方程(3.7)是渐近稳定的,再加上 $\delta_i \in [0,1)$,$0 < \lambda_i < 1, 1 \leqslant i \leqslant m$ 之任意性可知,θ 方法当$\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$ 时是渐近稳定的,亦即是 AGP_m 稳定的.定理 3.1 证毕.

附　　录

(Ⅰ)具有有界延时量的微分系统

许多现实问题中出现的微分方程往往带有常数延时量，如果不是常数，也至少是有界的．为此

考虑如下延时微分系统

$$x'(t)=f(t,x(g_1(t)),x(g_2(t)),\cdots,x(g_m(t))),\qquad (\text{Ⅰ}.1)$$

其中

$t-r\leqslant g_j(t)\leqslant t$, $t_0\leqslant t$, $j=1,2,\cdots,m$, $r>0$ 为某常数．方程的初始条件取为

$$x(t)=\theta(t)\qquad t_0-r\leqslant t\leqslant t_0.\qquad (\text{Ⅰ}.2)$$

我们假定函数 f 定义于 $[t_0,\beta)\times D^n\to R^n$，其中开集 $D\subseteq R^n$，$\beta>t_0$．

定义　如果 x 是一个函数，它至少在 $[t-r,t]$ 上有定义，x: $[t-r,t]\to R^n$，那末我们定义一个新函数 $x_t:[-r,0]\to R^n$，它定义为

$$x_t(\sigma)=x(t+\sigma),\qquad -r\leqslant\sigma\leqslant 0.$$

当 $x(s)$ 的自变量 s 在区间 $[t-r,t]$ 时 x_t 完全被确定，且把自变量变到 $[-r,0]$．倘使 x 是一个连续函数，于是 x_t 是 $[-r,0]$ 上的连续函数．

记号　将 $[-r,0]\to R^n$ 所有的连续函数的集合 $C([-r,0],R^n)$ 简单地记为 $\mathscr{C}$．当 A 是 R^n 中任一集合，我们记

$$\mathscr{C}_A=C([-r,0],A).$$

倘使 x 是 $[t-r,t]\to A$ 的连续函数，则说 $x_t\in C([-r,0],A)$．

我们根据需要而用 J 代表半开区间 $[t_0,\beta)$ 或者开区间 $(\alpha,$

β).

当 f 定义于 $J\times D^m$ 时，我们希望以

$$x'(t)=F(t,x_t) \tag{Ⅰ.1'}$$

来代表(Ⅰ.1)，于是我们要求 $t\in J, x_t\in\mathscr{C}_D$ 时 $F(t,x_t)$ 有意义.

$$F:J\times\mathscr{C}_D\to R^n.$$

换句话说，对每一个 $(t,\psi)\in J\times\mathscr{C}_D$，$F(t,\psi)$ 必须在 R^n 中确定一点.

一个映射，如 F 定义在一个函数集合上，有时我们称此映射为"泛函数"，因此，方程(Ⅰ.1)′有时也就称为"泛函微分方程"，但是我们仍然称为(Ⅰ.1)或(Ⅰ.1)′是延时微分方程，以强调，用 x 的当前和过去的值来确定导数 $x'(t)$.

例 1 为了使得方程(Ⅰ.1)′等价于方程(Ⅰ.1)，我们必须定义

$$F(t,\psi)=f(t,\psi(g_1(t)-t),\cdots,\psi(g_m(t)-t)).$$

事实上，注意到

$$x_t(g_j(t)-t)=x(t+g_j(t)-t)=x(g_j(t)),$$

从而

$$\begin{aligned}F(t,x_t)&=f(t,x_t(g_1(t)-t),\cdots,x_t(g_m(t)-t))\\&=f(t,x(g_1(t)),\cdots,x(g_m(t))).\end{aligned}$$

采用方程(Ⅰ.1)′比(Ⅰ.1)更有力，简洁.

例 2 如果

$$F(t,\psi)=\int_{-r}^{0}\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

则(Ⅰ.1)′成为

$$\begin{aligned}x'(t)&=\int_{-r}^{0}x_t(\sigma)\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{-r}^{0}x(t+\sigma)\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{t-r}^{t}x(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

上面的方程也称为有“无限多延时量的方程”.

既然我们喜欢使用方程(Ⅰ.1)′来代替(Ⅰ.1),那末初始条件(Ⅰ.2)亦必须改写. 方程(Ⅰ.2)等价于 $x(t_0+\sigma)=\theta(t_0+\sigma)$, $-r\leqslant\sigma\leqslant 0$,可简写为 $x_{t_0}=\theta_{t_0}$. 引入记号 $\phi=\theta_{t_0}$,这将成为

$$x_{t_0}=\phi. \qquad (Ⅰ.2)'$$

容易看出,(Ⅰ.2)′意味着 $x(t_0+\sigma)=\phi(\sigma)$,令 $t=t_0+\sigma$,我们有

$$x(t)=\phi(t-t_0), \quad t_0-r\leqslant t\leqslant t_0. \qquad (Ⅰ.2)''$$

我们总认为 $\phi\in\mathscr{C}_D$.

我们在常微分方程的教程中,在证明 $x'(t)=f(t,x(t))$, $x(t_0)=x_0$的解的存在唯一性时,往往先把上列方程改写为一个等价的积分方程. 这里,在证明方程(Ⅰ.1)′~(Ⅰ.2)′时,也能这样做. 我们要用下列假设:

连续性条件 C. 我们说 $F(t,x_t)$满足连续性条件(C),当且仅当,当 $t\in[t_0,\beta)$中时,每个给定的连续函数 x, $x:[t_0-r,\beta)\to D$, $F(t,x_t)$是连续的.

我们来看看条件(C)的作用. 如例 1,倘使 f 及 g_j, $1\leqslant j\leqslant m$ 都是连续函数,于是对任何连续函数 $x:[t_0-r,\beta)\to D$, $F(t,x_t)$ 是连续函数的复合函数,因此是连续的.

进而,倘使 $F:[t_0,\beta)\times\mathscr{C}_D\to R^n$ 满足连续性条件(C),于是一个连续函数 $x:[t_0-r,\beta_1)\to D$ 是(Ⅰ.1)′~(Ⅰ.2)′之解,当且仅当

$$x(t)=\begin{cases}\phi(t-t_0), & \text{对 } t_0-r\leqslant t\leqslant t_0,\\ \phi(0)+\int_{t_0}^{t}F(s,x_s)\mathrm{d}s, & t_0\leqslant t<\beta_1.\end{cases}$$

其中 $\beta_1\in(t_0,\beta)$.

我们定义一个函数 $\psi\in\mathscr{C}_D$ 的度量

$$\|\psi\|_r=\operatorname*{Sup}_{-r\leqslant\sigma\leqslant 0}\|\psi(\sigma)\|.$$

我们说 $\|\psi\|_r$ 是 ψ 的 r 范数,当且仅当 $D=R^n$, $\mathscr{C}_D=\mathscr{C}$,此时度量 $\|\psi\|_r$ 满足范数的三条公理.

定义 令 $\mathcal{S}\subseteq J\times\mathscr{C}_D$ 是一个子集，倘使存在某 $k>0$，使得

$$\| F(t,\psi)-F(t,\tilde{\psi})\| \leqslant k\|\psi-\tilde{\psi}\|_r,$$

此处 $(t,\psi),(t,\tilde{\psi})\in\mathcal{S}$. 我们就称 F 在 $\mathcal{S}$ 上满足 Lipschtz 条件，常数为 k（或者说 F 是 Lipschitz 的）

倘使 f 在 $J\times D^n$ 上满足 Lipschitz 条件，F 如例 1 那样定义，那末 F 在 $J\times\mathscr{C}_D$ 上是 Lipschitz 的.

定义 泛函数 $F:J\times\mathscr{C}_D\to R^n$ 被称是局部 Lipschitz 的，当且仅当每给定 $(\bar{t},\bar{\psi})\in J\times\mathscr{C}_D$，存在正数 $a,b>0$ 使得

$$\mathcal{S}=\{[\bar{t}-a,\bar{t}+a]\cap J\}\times\{\psi\in\mathscr{C}:\|\psi-\bar{\psi}\|_r\leqslant b\}$$

是 $J\times\mathscr{C}_D$ 的子集，且 F 在其上满足 Lipschitz 条件.

可以证明，若 f 是局部 Lipschitz 的，则 F 也是.

唯一性定理 令 $F:[t_0,\beta)\times\mathscr{C}_D\to R^n$ 满足连续性条件(C)，且是局部 Lipschitz 的，于是对任意的 $\phi\in\mathscr{C}_D$，方程(Ⅰ.1)′～(Ⅰ.2)′在 $[t_0-r,\beta_1)$ 上至多有一个解. 此处 $\beta_1\in(t_0,\beta)$.

连续依赖性定理 令 $F:[t_0,\beta)\times\mathscr{C}_D\to R^n$ 满足连续性条件(C)，且是局部Lipschitz的. 若 $\varphi,\bar{\varphi}\in\mathscr{C}_D$，而 $x,\bar{x}$ 是方程(Ⅰ.1)′～(Ⅰ.2)′之唯一解，它们的初始值分别为 $x_{t_0}=\phi,\bar{x}_{t_0}=\bar{\phi}$. 若 $x,\bar{x}$ 同时在 $[t_0,\beta_1)$ 上有定义，则

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|\leqslant\|\phi-\bar{\phi}\|_r e^{k(t-t_0)},\ t_0\leqslant t<\beta_1.$$

局部存在性定理 令 $F:[t_0,\beta)\times\mathscr{C}_D\to R$ 满足连续性条件(C)，且是局部 Lipschitz 的，于是对每个 $\varphi\in\mathscr{C}_D$，方程(Ⅰ.1)～(Ⅰ.2)在 $[t_0-\Delta,t_0+\Delta)$ 上有唯一解，$\Delta>0$.

整体存在性定理 令 $D=R^n$，$F:[t_0,\beta)\times\mathscr{C}\to R^n$ 满足连续性条件(C)，且是局部 Lipschitz 的，进而假定

$$\|F(t,\psi)\|\leqslant M(t)+N(t)\|\psi\|_r,\qquad 于[t_0,\beta)\times\mathscr{C},$$

此处 M,N 是 $[t_0,\beta)$ 上的连续正函数. 于是方程(Ⅰ.1)～(Ⅰ.2)在整个区间 $[t_0,\beta)$ 上存在不可开拓的(noncontinuahle)唯一解.

(Ⅱ)常系数线性延时方程

我们考虑如下线性方程

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j x(t - r_j) + h(t), \qquad (\text{II}.1)$$

其中 $A_j, 1 \leqslant j \leqslant m$ 是 $n \times n$ 复阵，$0 \leqslant r_j \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant m$ 是常数延时量，$h(t)$是$[t_0, \beta)$上的已知向量值函数，$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T \in C^n$ 是未知函数.

我们通常要考虑(Ⅱ.1)之初始条件

$$x_{t_0} = \phi, \qquad (\text{II}.2)$$

此处 $\phi \in \mathscr{C}$.

这一部分，我们重点考虑(Ⅱ.1)之齐次形式

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j y(t - \tau_j), \qquad (\text{II}.3)$$

$$y_{t_0} = \phi. \qquad (\text{II}.4)$$

我们回想起常系数线性常微分方程组，它们有 n 个线性无关的解，而一般解可以用这 n 个线性无关解的线性组合表示. 但是方程(Ⅱ.3)的场合，就要变得复杂得多. 因为一般(Ⅱ.3)有无限多个线性无关解.

让我们首先来寻找(Ⅱ.3)的指数形式的解 $y(t) = e^{\lambda t}\xi$，此处 $\xi \in C^n$是待定向量，λ 是复数，代入(Ⅱ.3)导致

$$\Big(\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\lambda \tau_j}\Big)\xi = 0. \qquad (\text{II}.5)$$

方程(Ⅱ.5)有非零解 $\xi \neq 0$，当且仅当 λ 满足特征方程

$$\det\Big[\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\lambda \tau_j}\Big] = 0. \qquad (\text{II}.6)$$

倘使特征方程(Ⅱ.6)的零点为 $\lambda = \mu + i\omega$，相应的解为 $\xi = \xi_1 + i\xi_2, i = \sqrt{-1}, \mu, \omega, \xi_1, \xi_2$ 是实数. 于是

$$y(t) = e^{\lambda t}\xi,$$

$$y(t) = e^{\mu t}[\xi_1 \cos\omega t - \xi_2 \sin\omega t],$$

$$y(t) = e^{\mu t}[\xi_2 \cos\omega t + \xi_1 \sin\omega t]$$

都是(Ⅱ.3)之解，第一个是复数形式的解，而第二第三个是实值

解. 当然,所有(Ⅱ.3)之解的线性组合也必定是(Ⅱ.3)之解. 但麻烦的是,(Ⅱ.6)一般有无限多个零点. 例如

$$y'(t) = y(t - r), \tag{Ⅱ.7}$$

此处 $r>0$ 是常数. (Ⅱ.7)之特征方程是

$$\lambda = e^{-\lambda r}. \tag{Ⅱ.8}$$

令, $z=1/\lambda$, 于是(Ⅱ.8)成为 $w(z)=0$,

$$w(z) = 1 - ze^{-r/z},$$

w 在 $z=0$ 有一个本性奇点,按 Picard 定理, $w(z)$在 $z=0$ 的每个邻域中能取到唯一值,(有一除外)无限多次,而这个例外容易看出对一切 $z\neq0$, $w(z)\neq1$. 这便推知 $w(z)$有无限多个复值零点.

但我们有如下定理:

定理Ⅱ.1 任意给定实数 ρ,方程(Ⅱ.6)不能多于有限多个零零点 λ,使得 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant\rho$.

下面的两个定理对我们是十分重要的:

定理Ⅱ.2 如特征方程(Ⅱ.6)的每一个零点 λ 满足 $\mathrm{Re}\lambda<\rho$,于是存在正数 $M>0$,使得对每个 $\phi\in\mathscr{C}$,方程(Ⅱ.3)~(Ⅱ.4)的解 $y(t)$满足

$$\| y(t,t_0,\phi) \| \leqslant M \| \phi \|_r e^{\rho(t-t_0)} \qquad t \geqslant t_0,$$

推论Ⅱ.3 如果特征方程(Ⅱ.6)的每个零点 λ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$,于是根据定理Ⅱ.1及定理Ⅱ.2,存在正数 $M,\gamma>0$,使得(Ⅱ.3)~(Ⅱ.4)之解

$$\| y(t,t_0,\phi) \| \leqslant M \| \phi \|_r e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0.$$

(Ⅲ)稳定性

考虑延时方程

$$x'(t) = F(t,x_t), \tag{Ⅲ.1}$$

$$x_{t_0} = \phi, \tag{Ⅲ.2}$$

此处 $F:(\alpha,\infty)\times\mathscr{C}_D\to R^n$, $\mathscr{C}_D=C([-r,0],D)$, $D\subseteq R^n$ 为一开集, $\alpha<t_0$, $\phi\in\mathscr{C}_D$. F在定义域上满足连续性条件(C),且是 Lips-

chitz 的，(局部地)，F 还是有界的. 在这些条件下，保证(Ⅲ.1)～(Ⅲ.2)有唯一解.

我们现在要问如下问题，倘若 $\overline{x}=x(t,t_0,\overline{\phi})$ 是(Ⅲ.1)～(Ⅲ.2)在区间$[t_0-r,\infty)$上的解，我们假设让 $\overline{\phi}$ 有微小的改变，给出一个新的解，同样定义于$[t_0-r,\infty)$，这个新的解是否仍然靠近$\overline{x}$?

定义　令$\overline{x}:(\alpha-r,\infty)\to D$ 在(α,∞)上满足方程(Ⅲ.1). 我们说$\overline{x}$在点 $t_0>\alpha$ 是**稳定的**，倘使对每个 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得当 $\|\phi-\overline{x}_{t_0}\|_r<\delta$ 时，解$x(t,t_0,\phi)$存在于$[t_0-r,\infty)$以及

$$\|x(t,t_0,\phi)-\overline{x}(t)\|<\varepsilon,\qquad t\geqslant t_0-r.$$

定义　(Ⅲ.1)的平凡解说是在点 $t_0>\alpha$ 处是稳定的，当且仅当，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得当 $\|\phi\|_r<\delta$ 时，解$x(t,t_0,\phi)$满足

$$\|x(t,t_0,\phi)\|<\varepsilon,\qquad t\geqslant t_0-r.\qquad (Ⅲ.3)$$

(Ⅲ.1)的平凡解说是于(α,∞)**一致稳定的**，当且仅当它在(α,∞)内每一点是稳定的，且 δ 与ε 有关，即 $\delta=\delta(\varepsilon)$.

定义　(Ⅲ.1)的平凡解说是**渐近稳定的**(在 t_0)，当且仅当它是在 t_0 是稳定的，以及存在 $\delta=\delta(t_0)$，当 $\|\phi\|_r<\delta$ 时

$$\lim_{t\to\infty}x(t,t_0,\phi)=0.$$

(Ⅲ.1)之平凡解被说是**一致地渐近稳定的**，当且仅当它在每一点 $t_0\in(\alpha,\infty)$是渐近稳定的，而且 δ 与 t_0 无关，只要 $\|\phi\|_r<\delta$ 时

$$\lim_{t\to\infty}x(t,t_0,\phi)=0.$$

例. 方程(Ⅱ.3)是一致渐近稳定的，倘使(2.6)的根有负实部.

参考文献

[1] AL-Mutib, A. N., Stability property of numerical methods for solving delay differential equations, *J. CAM*, **10** (1), 1984, 71~79.

[2] Baker, C. T. H. and Paul, C. A. H., Computing stability regions of Runge-Kutta methods for delay differential equations, *IMA. J. Numer. Anal.*, **14** (1994), 347~362.

[3] Barwell, V. K., On the asymptotic behaviour of the solution of a differential equation, *Utilita Math.*, **6** (1974), 189~194.

[4] Barwell, V. K., Special stability problems for functional differential equations, *BIT*, **15** (1975), 130~135.

[5] Bellen, A., Jackiewicz, Z. and Zennaro, M., Stability analysis of one-step methods for Neutral delay differential equations, *Numer. Math.*, **52** (1988), 605~619.

[6] Brayton, R. K. and Willouhby, R. A., On the numerical integration of a symmetrical system of difference differential equations of neutral type, *J. Math. Anal. Appl.*, **18** (1967), 182~189.

[7] Butcher, J. G., The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, Chichester, New York, John Wiley (1987).

[8] Driver, R. D., Ordinary and Delay Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1977.

[9] Hairer, E., Nørsett, S. P. and Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York (1987).

[10] Hale, J. K., Theory of Functional Equations, Springer-Verlag, New York, 1977.

[11] Henrici, P. Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, John-Wiley, & Sons Inc. New York, 1962.

[12] Hu, Guang Da and Mistsui, T., Stability of numerical Methods for neutral delay differeutial equations, BIT, **35**, 504~515.

[13] In't Hout, K. J., On the stability of a class of Runge-Kutta methods for delay differential equations, *Appl. Numer. Math.*, 9 (1992), 347~355.

[14] In't Hout, K. J., A new interpolation procedure for adapting Runge-Kutta methods for delay differential equations, *BIT*, **32** (1992) 634~649.

[15] In't Hout, K. J., The stability of θ - methods for systems of delay differential equations, *Report Series*, No. 282, Univ. Auckland, 1993.

[16] Jackiewicz, Z. Asymptotic stability analysis of θ - methods for functional differential equations, *Numer*, *Math*., 43 (1984), 389 ~ 396.

[17] Koto, T., A stability property of A-stable natrual Runge-Kutta methods for systems of delay differential equations, *BIT*, 34 (1994) 262 ~ 267.

[18] Kuang, J. X. and Xiang J. X., On the D-suitability of implicit Runge-Kutta methods, *BIT*, 1989, 321 ~ 327.

[19] Kuang, J. X. and Lu, L. H., On the unique solvability for nonlinear systems in MBDM, J. CM, 1994, No. 1, 55 ~ 60.

[20] Kuang, J. X. and Lin, Y. H., The numerical stability of multiderivative block methods, J. AMM, Vol 14 No. 2, 1993, 129 ~ 133.

[21] Kuang, J. X. and Lu, L. H, Two classes of finite difference methods for solving generalized Sin-Gordon equations, *J. CAM*, 31 (1990) 389 ~ 396.

[22] Kuang J. X., Xiang, J. X. and Tian, H. J., The asymptotic stability of one parameter methods for neutral differential equations, *BIT*, 34 (1994) No. 3, pp 400 ~ 408.

[23] Kuang, J. X. and Tian, H. J., The asymptotic behaviour of theoretical and numerical solutions for delay differential equations with several delay terms, J. of Shanghai Normal Univ, a special issure of math., 1994, 1 ~ 9.

[24] Kuang, J. X. and Tian, H. J., The asymptotic. behaviour of theoretical and numerical solutions for nonlinear systems with several delays, J. of Shanghai Normal Univ., No. 1, 1995, 1 ~ 7.

[25] Kuang, J. X. and Ye, X. J., The GPL-stability of Runge-Kutta methods for delay differential equations, to appear on J. CM.

[26] Lambert, J. D., Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John-Wiley, New York, 1990.

[27] Lancaster, Peter and Tismenetask, M., The Theory of Matrices, Academic Press, New York, 1985.

[28] Liu, M. Z. and Spijker, M. N., The stability of θ - mathods in the numerical solution of delay differential equations, *IMA*, *Numer*, *Anal*., 10 (1) 1990, 31 ~ 48.

[29] Liu yankang, Stability analysis of the θ - methods for neutral functional differential equations, *Namer*. *Math*., 70 (1995) 473 ~ 483.

[30] Lu, L. H., Numerical stability of θ - methods for systems of differential equations, with several delays, *J. CAM*, 34 (1991) 291 ~ 304.

[31] Lu, L. H., The stability of the block θ-methods, *IMA, J. Numer, Anal.*, **13** (1993) 101～114.

[32] Miranker, W. L., The Wave equations with nolinear interface condition, *IBM, J. Res Deveiopm*, **5** (1961) 2～24.

[33] Miranker, W. L. Existence, uniqueness and stability of solutions of systerms of nonlinear difference differential equations, *J. Math. Mech.*, **11** (1962).

[34] Qin Zen-fu, A class of nonlinear methods for Ordinary differential equations, *J. CM*, Vol **13** (1985) 320～327.

[35] Qin Zen-fu, The algebra criterion of consistency for general Linear methods, *J. CM*, 5, (1987), 215～226.

[36] Qiu Lin and Kuang Jiaoxun, The numerical stability of the θ-methods for delay differential equations with mangy variable delays, *J. CM*, to appear.

[37] Qiu Lin, Yang Biao and Kuang Jiaoxun, The NGP-stability of Runge-Kutta methods for systems of neutral delay differential equations, *Numer. Math.*, 81 (1999) 451～459.

[38] Sun Geng, A class of single step methods with a large interval of absolute stability, *J, CM*, **9** (2) 185～193.

[39] Tian, H. J. and Kuang, J. X., The stability of θ-methods in numerical solution of differential equations with several delay terms, *J. CAM*, **56** (1995) 171～181.

[40] Tian, H. J. and Kuang, J. X., The stability of Linear multistep methods for differential equations with many delays, *SIAM, Numer, Anal.*, Vol **33** (1996) 883～889.

[41] Tian, H. J. and Kuang, J. X., The stability analysis of the θ-methods for delay differential equations, *J. CM*. Vol **14** (1996) 203～212.

[42] Tian, H. J. and Kuang, J. X., The stability of linear multistep methods for systems of delay differential equations, *Numer. Math. A Journal of Chinese Univ.*, Vol **4** (1995) 10～16.

[43] Tian, H. J. and Kuang, J. X., The stability of θ-methods in numerical solution of systems of differential equations with many delays, *SEE*, **5** (1994) No. 3.

[44] Tian, H. J. and Kuang, J. X., The numerical stability analysis of numerical methods for Volterra integral equations with delay terms, *J. AMM, a Chinese Journal* (English issue) Vol **16** (1995) No. 5, 485～491.

[45] Tian H. J. and Kuang J. X., The numerical stability analysis of Runge-Kutta methods for delay differential equations with several delay terms, *J. of Shanghai Normal Univ.*, Vol **23**, No. 2, 1994, 95～100.

[46] Tian, H. J. and Kuang, J. X., The numerical stability. of the θ - methods in the numerical solution of delay differential equations with several delay terms, *J. of shanghai Normal Univ. A special issure of Math.*, 1994, 17～23.

[47] Torelli, L., Stability of numerical methods for delay differential equations, *J. CAM.*, **25** (1989) 15～26.

[48] Torelli, L., A sufficient condition for GPN-stability for delay differential equations, *Numer, Math.*, **59** (1991) 311～320.

[49] Watanabe, D. S. and Roth, M. G., The stability of difference formulas for delay differential equations, *SIAM, J. Numer, Anal.*, **22** (1985).

[50] Wolkenfelt, P. H. M., The construction of Reducible quadratrue Rule for Volterra integral equation and integro-differential equations IMA, *J. Numer, Anal.*, **2** (1982) 131～152.

[51] Xiang Jia Xiang, The high order exponential fitted non-equidistant extrapolation methods for stiff systems, *J. CM*, Vol **3** (1985) 342～350.

[52] Xiang Jiaxiang, and Kuang Jiaoxun, A class of DBDF methods with derivative modifing terms, *J. CM*, Vol. **6** (1988) 7～13.

[53] Zhou Bin, *A* - stable and L-stable implicite one-step block methods, *J. CM*, Vol. **3** (1985) 328～341.

[54] 包雪松，一类A稳定的块方法，南京大学数学半年刊，**8** (1991) No. 1, 35～40.

[55] 包雪松，求解 $y''=f(t, y)$ 的一类多步法，南京大学学报，**28** (1992) No. 3, 372～380.

[56] 田红炯，匡蛟勋，滞时 Volterra 积分方程数值方法的稳定性．应用数学与力学，Vol. **16** (1995) No. 5, 451～457.

[57] 田红炯，匡蛟勋，多延时量微分方程 Runge-Kutta 的稳定性分析，上海师范大学学报 1994, No. 2.

[58] 刘明珠等，延时微分方程 θ 方法的稳定性，系统仿真学报 **5** (1993) No. 2.

[59] 匡蛟勋，田红炯，Neutral 方程解的渐近性态，科学通报，Vol. **39** (1994) No 20,1825～1828, 95～100.

[60] 匡蛟勋，块 θ 方法的 *PL* 稳定性．计算数学，No. **2**, 1997, 135～140.

[61] 匡蛟勋，项家祥，一类修正的 BDF 方法，计算数学，Vol. **9** (1989) No. 4, 411～418.

[62] 匡蛟勋，延时微分方程的数值处理，计算数学通讯，No. 4, 1994.

[63] 匡蛟勋，带有高阶导数的块方法，高校计算数学学报，Vol. **9** (1987) No. 1, 14～23.

[64] 匡蛟勋，林玉华，多导块方法的稳定性分析，应用数学与力学，Vol. **14**

(1993) No. 2, 118～126.
[65] 匡蛟勋，鲁连华，多步龙格-库塔方法的稳定性分析，系统仿真学报，Vol. 5 (1993) No. 2, 42～50.
[66] 匡蛟勋，解延时微分方程 θ 方法的稳定性分析，全国第六届常微分方程数值解会议论文集，1997，庐山.
[67] 匡蛟勋，田红炯，非线性滞后微分方程数值方法的稳定性，上海师范大学学报，Vol. 22,(1993) No. 2, 1～8.
[68] 匡蛟勋，田红炯，多延时量微分方程理论及数值解的渐近性态. 上海师范大学学报 Vol, 23 数学专辑，1994.
[69] 匡蛟勋，田红炯，非线性滞时微分系统的理论及数值解，上海师范大学学报，Vol. 24 (1995) No. 1, 1～9.
[70] 李寿佛，刚性微分方程算法理论，湖南科技出版社，1997.
[71] 李寿佛，多步 Runge-Katta 方法的代数稳定性，系统仿真学报，Vol. 5 (1993) No. 2, 51～58.
[72] 李寿佛，Banach 空间中 stiff 问题一般多值方法的 B 收敛性，中国科学，5, 476～485.
[73] 李寿佛，线性多步法的 B 收敛性，湘潭大学学报，Vol. 1 (3) 6～12.
[74] 李寿佛，黄小平，Stiff 常微分方程的收缩方法，高等学校计算数学学报，Vol. 14, No. 3, 318～331.
[75] 孙耿，波动方程的一类辛格式，计算数学，Vol. 19, No. 1, 47～57.
[76] 李旺尧，关于求解常微分方程的自适应技术，数值计算与计算机应用，Vol. 11 (1990) No. 1, 53～58.
[77] 吴新元，具有高精度大稳定性区域的二阶导数方法及其 Stiff 稳定性，南京大学学报，Vol. 27 (1991), 53～58.
[78] 袁兆鼎，费景高，刘德贵，刚性微分方程的数值解，1984 科学出版社.
[79] 顾云海，陈果良，一类 stiff 稳定的线性多步法，计算数学，Vol. 14 (1992) No. 3.
[80] 徐洪义，包雪松，求解常微分方程的一类多步法，系统仿真学报，Vol. 5, (1993) No. 2, 33～41.
[81] 徐绪海，解 Stiff 方程的二阶拓展法，武汉大学学报，Vol 10 (1990) 63～70.
[82] 徐绪海，解常微分方程初值问题的 BDF 并行迭代法，武汉大学学报，No, 4, (1992) 1～8.
[83] 秦曾复，菲波纳奇数列在常微分方程外推法中的应用，计算数学，Vol. 13, (1991) 425～432.
[84] 赵双锁，董国雄，解 Stiff 常微分方程初值问题 (k, 1) 方法的收缩性，兰州大学学报 Vol. 26 (1990) 28～34.

[85] 赵双锁，基于半比例隐式 Runge-Kutta 方法的嵌入问题，高等学校计算数学学报，Vol. 12 (1990) 383～389.

[86] 赵双锁，块 θ 方法的最高可达阶，高校计算数学学报，1991.

[87] 赵双锁，张国凤，一类 A 稳定式 L 稳定的经济隐式单块方法，计算数学，Vol. 17，No. 3，260～270.

[88] 赵双锁，张国凤，以仅有二个互异特征值的单构矩阵为系数的一类单块方法，计算数学，Vol. 19，No. 1，47～57.

[89] 赵双锁，关于线性多块方法的稳定性、相容性和收敛性，计算数学，Vol. 16，No. 3，247～256.

[90] 缪建铭，多导混合单步法，高等学校计算数学学报，Vol. 11，No. 1，43～52.